
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1896.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions;

Par M. Paul APPELL.

1. Dans le *Messenger of Mathematics* (t. IV, 1867), M. Niven a montré comment les équations de Lagrange peuvent être employées utilement pour l'étude des percussions : la même question a été traitée par M. Routh (*Rigid Dynamics*, 1er Volume). Mais la méthode suivie par ces auteurs peut être perfectionnée, car les équations qu'ils donnent contiennent encore des percussions de liaison provenant des liaisons nouvelles introduites brusquement au moment du choc. Ces équations ne répondent donc pas entièrement au but poursuivi par Lagrange, qui est d'obtenir des équations ne contenant pas les forces de liaison. Nous allons montrer comment on peut atteindre ce but, en suivant une méthode que nous avons indiquée sommairement dans les *Comptes rendus* (t. CXVI, 1893, p. 1483).

2. Imaginons un système en mouvement dans lequel les liaisons ont lieu *sans frottement*. La manière la plus générale de concevoir un choc ou une percussion sur ce système paraît être la suivante : à un instant donné t_0, on introduit brusquement de nouvelles liaisons dans le système et, en même temps, on supprime brusquement certaines liaisons anciennes. Le mouvement du système est alors troublé; il se produit des percussions entre ses différentes parties, et, dans un intervalle de temps très court $t_1 - t_0$, les vitesses des différents points du système subissent des variations finies, sans que le système change sensiblement de position; en outre, l'action des forces ordinaires telles que la pesanteur peut être regardée comme négligeable pendant l'intervalle de temps $t_1 - t_0$, de sorte que les changements brusques de vitesses survenus dans cet intervalle sont dus uniquement aux percussions qui se produisent sur les différentes parties du système, en vertu des liaisons imposées à ces parties.

Nous ne nous occuperons ici que de la première approximation qui consiste à regarder le système comme immobile pendant le temps très court $t_1 - t_0$ et à regarder comme nulles les actions des forces ordinaires, autres que celles qui produisent les percussions.

Tout d'abord nous ferons une classification des liaisons qui existent au moment où le choc se produit, c'est-à-dire à l'instant t_0. Il est entendu que le choc est terminé et a produit tous ses effets à l'instant t_1, extrêmement rapproché de t_0.

3. Les liaisons qui existent au moment du choc peuvent être de deux espèces : les unes sont persistantes, les autres ne le sont pas. Nous appellerons *persistantes* les liaisons qui, existant au moment du choc, existent encore après, de telle sorte que le déplacement réel qui suit immédiatement le choc soit compatible avec ces liaisons. Au contraire, les liaisons *non persistantes* sont celles qui, existant au moment du choc, n'existent pas après; le déplacement réel qui suit immédiatement le choc n'est pas compatible avec ces liaisons.

D'après cela, les liaisons existant au moment du choc peuvent être classées dans les catégories suivantes, qui s'excluent :

1° Liaisons existant avant, pendant et après le choc;

2° Liaisons existant pendant et après, mais non avant;

3° Liaisons existant avant et pendant, mais non après;

4° Liaisons existant seulement pendant le choc, mais n'existant ni avant ni après.

Les deux premières catégories contiennent des liaisons persistantes, les deux autres des liaisons non persistantes.

Par exemple, dans le pendule balistique, le pendule est mobile autour d'un axe fixe; cette liaison existe avant, pendant et après la percussion; le boulet, primitivement indépendant du pendule, vient brusquement faire corps avec lui; on a ainsi une nouvelle liaison dont la brusque réalisation produit le choc et qui existe pendant et après le choc, mais non avant. Quand deux corps élastiques se choquent, une liaison est brusquement introduite dans le système des deux corps, car leurs surfaces sont venues en contact; les deux corps se séparent ensuite; on a ainsi une liaison existant pendant la percussion, mais n'existant ni avant, ni après. Enfin imaginons deux points reliés par un fil inextensible et lancés en l'air. Supposons qu'on saisisse brusquement l'un des deux points et qu'à ce moment le fil se rompe, alors on voit qu'une liaison a été brusquement introduite d'une façon persistante, car un des points devient et reste fixe; en même temps une liaison, existant avant le choc, n'existe plus après, car le fil s'est rompu; cette liaison rentre dans la troisième catégorie.

4. Occupons-nous maintenant des expressions analytiques de ces diverses liaisons.

1° *Liaisons de la première catégorie.* — Envisageons d'abord les liaisons qui existent avant, pendant et après; en vertu de ces liaisons, la configuration du système dépend de k paramètres, géométriquement indépendants, $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et la demi-force vive T est une fonction du second degré des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ par rapport au temps. Dans l'intervalle de temps très court $t_1 - t_0$, que dure le choc, les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, qui définissent l'état des vitesses, passent brusquement des valeurs connues $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$, qu'elles possèdent au moment où le choc se produit, à d'autres valeurs $(q'_1)_1$, $(q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1$, tandis que les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, qui définissent la position, ne changent pas sensiblement de valeurs. Comme nous l'avons dit, nous ne cherchons que la première approximation,

qui consiste à regarder l'intervalle $t_1 - t_0$ comme négligeable et à supposer que les q'_ν changent subitement de valeurs sans que les q_ν changent.

2° *Liaisons des deuxième, troisième, quatrième catégories.* — Passons maintenant aux liaisons des trois autres catégories qui viennent s'ajouter à celles que nous venons de considérer.

Nous pouvons toujours supposer que les liaisons de la deuxième catégorie (liaisons ayant lieu pendant et après, mais non avant la percussion) sont exprimées par les relations

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_a = 0 \qquad (a < k);$$

celles de la troisième (existant avant et pendant et non après), par les relations

$$q_{a+1} = 0, \qquad q_{a+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_b = 0 \qquad (b < k);$$

enfin celles de la quatrième (existant pendant, mais n'existant ni avant, ni après) par les relations

$$q_{b+1} = 0, \qquad q_{b+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_c = 0 \qquad (c < k).$$

En effet, des liaisons quelconques, imposées au système dont la configuration est définie par les k paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, s'expriment toujours par des relations

$$\begin{aligned} &\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0, \\ &\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\varphi_n(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0 \qquad (n < k). \end{aligned}$$

Si l'on fait un changement de variables en prenant pour nouveaux paramètres, à la place de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, les quantités

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ p_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n &= \varphi_n(q_1, q_2, \ldots, q_k), \end{aligned}$$

les nouvelles liaisons imposées au système s'exprimeront évidemment par

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_n = 0.$$

C'est ce choix de variables que nous supposons qu'on ait réalisé.

Il va de soi que si les liaisons d'une catégorie, par exemple de la quatrième, n'existent pas, le nombre entier appelé c est égal à b; si celles de la troisième n'existent pas, $b = a$.

D'après la définition même des catégories de liaisons, les variables $q_1, q_2, \ldots, q_a$ sont différentes de zéro avant le choc, ainsi que leurs dérivées $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_a)_0$, mais ces variables étant assujetties ensuite à rester nulles pendant et *après* le choc, les valeurs finales $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_a)_1$ sont *nulles*.

De même les variables $q_{a+1}, \ldots, q_b$ sont nulles avant et pendant, non après : les valeurs initiales de leurs dérivées $(q'_{a+1})_0, \ldots, (q'_b)_0$ sont donc nulles, tandis que les valeurs finales $(q'_{a+1})_1, \ldots, (q'_b)_1$ ne le sont pas.

Enfin, comme $q_{b+1}, \ldots, q_c$ ne sont assujetties à être nulles ni avant ni après, leurs dérivées $q'_{b+1}, q'_{b+2}, \ldots, q'_c$ ne sont nulles ni avant, ni après le choc.

Voici comment on peut former des équations entre ces différentes grandeurs, par la méthode de Lagrange.

5. Pendant l'espace de temps $t_1 - t_0$, nous pouvons regarder les liaisons des trois dernières catégories comme n'existant pas, à condition d'appliquer au système les forces provenant de ces liaisons. Les équations du mouvement sont alors, d'après le principe de d'Alembert et la transformation de Lagrange, résumées par la formule

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right] \delta q_\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} Q_\nu \, \delta q_\nu.$$

Si les δq_ν sont arbitraires, le second membre contient les travaux virtuels des forces provenant des liaisons des trois dernières catégories qui toutes existent pendant le temps $t_1 - t_0$. Mais *nous éliminerons ces dernières forces de liaison en supposant que le déplacement*

virtuel δq_1, δq_2, ..., δq_k est compatible avec toutes les liaisons ayant lieu au moment du choc, c'est-à-dire en supposant δq_1, δq_2, ..., δq_a, ..., δq_b, ..., δq_c nuls, les variations δq_{c+1}, δq_{c+2}, ..., δq_k étant seules différentes de zéro et arbitraires. L'équation (1) se décompose alors en les $k-c$ suivantes :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = c+1, c+2, \ldots, k)$$

où ne figure plus aucune force de liaison.

Comme les variations brusques de vitesses sont produites par les seules forces de liaison, qui sont devenues très grandes pendant le temps très court $t_1 - t_0$, les quantités Q_{c+1}, Q_{c+2}, ..., Q_k, qui proviennent uniquement des forces ordinaires directement appliquées telles que la pesanteur, restent finies pendant la durée $t_1 - t_0$ du choc; les quantités $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ restent également finies, car les variables q conservent des valeurs déterminées et les q' des valeurs finies. Si donc on multiplie les deux membres de chaque relation (2) par dt, et si l'on intègre dans l'intervalle très petit $t_1 - t_0$, les intégrales provenant de $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ et Q_α sont négligeables, et l'on obtient les équations

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = 0 \qquad (\alpha = c+1,\ c+2,\ \ldots,\ k).$$

La notation $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1$ désigne la valeur que prend $\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$ après le choc, et $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0$ la valeur que possède cette dérivée avant. Dans ces deux valeurs, q_1, q_2, ..., q_k sont les mêmes, car le système est regardé comme immobile pendant la durée $t_1 - t_0$ du choc; de sorte que $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0$ ne diffèrent que par les valeurs de q'_1, q'_2, ..., q'_k qui passent des déterminations $(q'_1)_0$, $(q'_2)_0$, ..., $(q'_k)_0$ aux déterminations $(q'_1)_1$, $(q'_2)_1$, ..., $(q'_k)_1$.

Comme T est du second degré par rapport aux q', les équations (3) sont linéaires et homogènes par rapport aux k différences

$$(q'_\nu)_1 - (q'_\nu)_0.$$

Dans ces équations, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ont les valeurs qui correspondent à la position du système au moment du choc, de sorte que $q_1, q_2, \ldots, q_a, q_{a+1}, \ldots, q_b, q_{b+1}, \ldots, q_c$ sont nuls, $q_{c+1}, \ldots, q_k$ ayant des valeurs connues. Les quantités $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$ sont connues; parmi elles, $(q'_{a+1})_0, (q'_{a+2})_0, \ldots, (q'_b)_0$ sont nulles. Les quantités $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1$ sont les inconnues; parmi elles, $(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_a)_1$ sont *nulles*, car les liaisons $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $\ldots$, $q_a = 0$ sont persistantes.

Il reste donc, en définitive, $(k - a)$ inconnues $(q'_{a+1})_1, (q'_{a+2})_1, \ldots, (q'_k)_1$, et l'on a, entre ces inconnues, les $(k - c)$ équations linéaires (3) $(c \geqq a)$.

Le nombre des inconnues est donc en général supérieur à celui des équations. Pour achever de déterminer le problème, il faut faire des hypothèses particulières, tirées de considérations d'élasticité par exemple, sur ce qui se passe après le choc. On a de ce fait un exemple élémentaire en prenant le choc direct de deux corps sphériques et en écartant le cas où les corps sont parfaitement mous; alors la liaison brusquement introduite ne persiste pas après le choc, car les deux sphères se séparent. La Mécanique rationnelle fournit, entre les vitesses des deux sphères après le choc, *une seule équation* exprimant que la vitesse du centre de gravité commun n'a pas changé. On obtient la seconde équation par des considérations d'élasticité : ainsi, en supposant les sphères parfaitement élastiques, on écrit que la force vive totale est la même après et avant le choc. Nous allons traiter quelques exemples par notre méthode, en remarquant que le problème est complètement résolu par les équations (3) toutes les fois que $c = a$, c'est-à-dire que les liaisons des troisième et quatrième catégories n'existent pas, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que les liaisons existant au moment du choc sont toutes *persistantes*.

6. *Règle.* — On peut résumer les équations (3) en disant qu'elles expriment la propriété suivante :

Les dérivées partielles de T, *par rapport aux dérivées de ceux des paramètres qui ne sont pas assujettis à s'annuler au moment du choc, ont les mêmes valeurs avant et après le choc.*

7. *Exemple I. — Choc direct de deux sphères.* — Soient deux sphères de rayons R_1 et R_2 et de masses m_1 et m_2 dont les centres se meuvent sur une droite fixe Ox. Les deux sphères sont supposées animées de mouvements de translation. Appelons x_1 et x_2 les abscisses des centres des deux sphères; la position du système dépend des deux paramètres x_1 et x_2; au moment du choc, une nouvelle liaison est brusquement introduite : cette liaison s'exprime par l'équation

$$x_2 - x_1 - R_1 - R_2 = 0,$$

qui signifie que la distance des centres égale la somme des rayons. Pour définir la position du système, nous prendrons les deux paramètres

$$q_1 = x_1, \qquad q_2 = x_2 - x_1 - R_1 - R_2,$$

de manière que la liaison brusquement introduite s'exprime par $q_2 = 0$. On a alors

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 x_1'^2 + m_2 x_2'^2) = \tfrac{1}{2}[m_1 q_1'^2 + m_2 (q_1' + q_2')^2].$$

La théorie précédente fournit alors l'équation unique

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)_0 = 0,$$

car q_1 ne s'annule pas au moment du choc, tandis que la variable q_2 est assujettie à s'annuler. On a, en faisant le calcul,

$$m_1[(q_1')_1 - (q_1')_0] + m_2[(q_1')_1 + (q_2')_1 - (q_1')_0 - (q_2')_0] = 0.$$

C'est là l'équation unique fournie par la théorie. Elle exprime que la somme des projections des quantités de mouvement sur Ox n'a pas varié. Pour achever de déterminer $(q_1')_1$ et $(q_2')_1$, il faut faire des hypothèses.

Si les corps sont parfaitement mous, ils restent au contact. La liaison brusquement introduite est permanente. La variable q_2 reste nulle après le choc; donc, sa dérivée $(q_2')_1$ après le choc est nulle.

Alors

$$(m_1 + m_2)(q'_1)_1 = m_1(q'_1)_0 + m_2[(q'_1)_0 + (q'_2)_0],$$

c'est-à-dire, en revenant aux x_1 et x_2,

$$(x'_1)_1 = \frac{m_1(x'_1)_0 + m_2(x'_2)_0}{m_1 + m_2}.$$

8. *Exemple II. — Pendule balistique.* — Considérons le plan vertical dans lequel se meut le boulet d'un mouvement de translation, et prenons pour origine la trace de l'axe de suspension sur ce plan. Soient r et α les coordonnées polaires du boulet, θ l'angle d'écart du pendule avec la verticale. La position du système dépend des trois paramètres r, α et θ. Au moment du choc, le boulet fait corps avec le pendule et ne peut plus que tourner avec lui. Donc r devient une constante a et α devient égal à θ.

Nous prendrons comme nouveaux paramètres

$$q_1 = \theta, \qquad q_2 = r - a, \qquad q_3 = \theta - \alpha,$$

de façon que les liaisons brusquement introduites s'expriment par les équations

$$q_2 = 0, \qquad q_3 = 0.$$

On a actuellement, pour la demi-force vive totale du système,

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \tfrac{1}{2}[\mathrm{I}\theta'^2 + m(r'^2 + r^2\alpha'^2)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\mathrm{I}q_1'^2 + mq_2'^2 + m(q_2 + a)^2(q'_1 - q'_3)^2], \end{aligned}$$

où I est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension et par suite $\mathrm{I}\theta'^2$ la force vive du pendule.

Les liaisons introduites s'exprimant par $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, il y a une seule équation à écrire, celle qui se rapporte à la variable q_1, qui n'est pas assujettie à s'annuler au moment du choc,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right)_0 = 0.$$

Cette équation est

$$I[(q'_1)_1 - (q'_1)_0] + m(q_2 + a)^2[(q'_1)_1 - (q_3)_1 - (q'_1)_0 + (q'_3)_0] = 0.$$

Mais comme les liaisons introduites sont persistantes, q_2 et q_3 sont et restent nuls, et l'on a $(q'_2)_1 = 0$, $(q'_3)_1 = 0$; le pendule partant du repos, θ'_0, c'est-à-dire $(q'_1)_0$, est nul aussi. On a donc

$$(I + ma^2)(q'_1)_1 + ma^2(q'_3)_0 = 0.$$

Revenant aux variables θ et α, on a

$$(I + ma^2)(\theta')_1 - ma^2(\alpha')_0 = 0,$$

équation qui donne la vitesse angulaire finale $(\theta')_1$ du pendule, la quantité $a(\alpha')_0$ étant connue : c'est la composante de la vitesse du boulet m perpendiculaire au rayon Om au moment du choc.

Exemple III. — Un disque circulaire homogène de masse M et de rayon R se meut dans un plan vertical xOy ; à un instant t_0, il heurte l'axe fixe Ox et ne peut plus que rouler sur cet axe. Déterminer sa vitesse après le choc.

La position du système avant le choc dépend de trois paramètres, les coordonnées x et y du centre du disque et l'angle θ dont il a tourné dans le sens négatif de Oy vers Ox. Au moment du choc, deux liaisons nouvelles sont introduites :

1° Le disque reste en contact avec Ox, donc on a

$$y = R.$$

2° Il roule sur Ox, donc on a $x = R\theta$, en choisissant convenablement la position de l'origine. Nous prendrons comme paramètres

$$q_1 = x, \qquad q_2 = y - R, \qquad q_3 = x - R\theta,$$

de sorte que les liaisons introduites s'expriment par $q_2 = 0$, $q_3 = 0$. On a

$$T = \frac{M}{2}(k^2\theta'^2 + x'^2 + y'^2),$$

Mk^2 désignant le moment d'inertie du disque par rapport au centre. Avec les nouveaux paramètres

$$T = \frac{M}{2}\left[k^2 \frac{(q'_1 - q'_3)^2}{R^2} + q'^2_1 + q'^2_2\right].$$

Le seul paramètre que les liaisons nouvelles n'assujettissent pas à être nul est q_1 ; on a donc l'équation unique

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)_0 = 0$$

ou

$$\frac{k^2}{R^2}[(q'_1)_1 - (q'_3)_1 - (q'_1)_0 + (q'_3)_0] + (q'_1)_1 - (q'_1)_0 = 0.$$

Mais q_3 reste nul, $(q'_3)_1$ est donc nul et l'on a, en revenant aux anciennes variables x, y, θ et distinguant par les indices 0 et 1 les valeurs initiales et finales de x', y', θ',

$$\frac{k^2}{R^2}(x'_1 - R\theta'_0) + x'_1 - x'_0 = 0,$$

$$x'_1 = \frac{R^2 x'_0 + k^2 R\theta'_0}{k^2 + R^2}.$$

Cette formule donne la vitesse finale du centre dans le mouvement de roulement.

Par exemple si le mouvement au moment du choc est tel que

$$Rx'_0 + k^2\theta'_0 = 0,$$

le disque s'arrête.

9. *Théorème de Carnot.* — Depuis plusieurs années j'ai adopté, dans mon enseignement à la Faculté des Sciences, l'énoncé suivant du théorème de Carnot envisagé dans sa plus grande généralité [1].

Si dans un système dont les liaisons sont réalisées sans frotte-

---

[1] *Voir* les feuilles de mon *Cours de Mécanique rationnelle*, rédigé par MM. Abraham et Delassus, 1888 (Hermann), p. 423 et suiv., ou mon *Traité de Mécanique*.

ment, on introduit brusquement de nouvelles liaisons PERSISTANTES, *la force vive perdue est égale à la force vive qui serait due aux vitesses perdues.*

Je me propose de tirer ce théorème des équations générales établies plus haut.

Supposons, comme plus haut, que la configuration du système dépend des k paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$. A l'instant t_0 on introduit des liaisons nouvelles

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad q_a = 0 \qquad (a < k),$$

toutes persistantes. Alors les deux dernières catégories de liaisons n'existent pas; les nombres appelés b et c sont égaux à a.

Les équations (3) deviennent

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = 0$$
$$(\alpha = a+1, a+2, \ldots, k).$$

La force vive $2T$ est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$,

$$2T = \varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) = \Sigma a_{ij} q'_i q'_j.$$

La force vive perdue est

$$2(T_0 - T_1) = \varphi[(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0] - \varphi[(q'_1)_1, (q'_2)_1, \ldots, (q'_k)_1].$$

D'autre part, la force vive qui serait due aux vitesses perdues est

$$2T' = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \Sigma a_{ij} p_i p_j,$$

en faisant pour abréger

$$p_\nu = (q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

C'est ce qu'on voit en partant des expressions des coordonnées

d'un point du système en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$,

$$x = f(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$y = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$z = \chi(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Les projections x', y', z' de la vitesse du point étant

$$x' = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} q'_2 + \ldots, \qquad y' = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q'_1 + \ldots, \qquad z' = \frac{\partial \chi}{\partial q_1} q'_1 + \ldots,$$

on a

$$2T = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Les projections x'_0, y'_0, z'_0 de la vitesse v_0 avant le choc s'obtiennent en donnant aux q'_ν les valeurs $(q'_\nu)_0$; les projections x'_1, y'_1, z'_1 de la vitesse v_1 après le choc, s'obtiennent en donnant aux q'_ν les valeurs $(q'_\nu)_1$: les projections de la vitesse perdue w sont donc

$$x'_0 - x'_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} p_2 + \ldots,$$

$$y'_0 - y'_1 = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} p_1 + \ldots,$$

$$z'_0 - z'_1 = \frac{\partial \chi}{\partial q_1} p_1 + \ldots.$$

La force vive qui serait due aux vitesses perdues

$$2T' = \Sigma m [(x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2 + (z'_0 - z'_1)^2]$$

se déduit donc de l'expression générale $2T$ de la force vive en y remplaçant $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ par $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

L'expression de $2T'$ étant ainsi trouvée, remarquons, en vue de la suite, que l'on a identiquement

$$(5) \qquad \frac{\partial T'}{\partial p_\nu} = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1;$$

cela résulte immédiatement de ce que les dérivées figurant dans cette

relation sont linéaires; en effet,

$$\frac{\partial T'}{\partial p_\nu} = a_{\nu 1} p_1 + a_{\nu 2} p_2 + \ldots$$
$$= a_{\nu 1} (q'_1)_0 + a_{\nu 2} (q'_2)_0 + \ldots - a_{\nu 1} (q'_1)_1 - a_{\nu 2} (q'_2)_1 - \ldots,$$

ce qui est précisément l'identité (5).

Ceci posé, et en vertu du théorème des fonctions homogènes, on a

$$2(T_0 - T_1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_0 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1,$$

ou encore, en ajoutant et retranchant la somme,

$$\Sigma (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0,$$

(6) $$\begin{cases} 2(T_0 - T_1) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=k} [(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1] \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 \\ \qquad - \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_1 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0\right]. \end{cases}$$

Pour simplifier cette expression remarquons que la première somme, qui peut s'écrire

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} p_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0,$$

est, d'après une propriété bien connue des formes quadratiques, symétrique par rapport aux variables $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et $(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0$. On peut donc l'écrire

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} (q'_\nu)_0 \frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

La deuxième somme figurant dans (6) est évidemment, d'après l'identité (5),

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu=k}(q'_\nu)_1\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Mais dans ces sommes tous les termes $\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}$ dont l'indice ν surpasse a sont nuls d'après les équations du problème (4). On a donc enfin, pour la force vive perdue, l'expression

$$(7) \qquad 2(T_0-T_1)=\sum_{\nu=1}^{\nu=a}(q'_\nu)_0\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}+\sum_{\nu=1}^{\nu=a}(q'_\nu)_1\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Quant à la force vive $2T'$ due aux vitesses perdues, elle peut s'écrire, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$2T'=\sum_{\nu=1}^{\nu=k}p_\nu\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

Dans cette somme les termes $\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}$ où ν est supérieur à a sont nuls; on a donc, en remplaçant p_ν par sa valeur $(q'_\nu)_0-(q'_\nu)_1$,

$$(8) \qquad 2T'=\sum_{\nu=1}^{\nu=a}(q'_\nu)_0\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}-\sum_{\nu=1}^{\nu=a}(q'_\nu)_1\frac{\partial T'}{\partial p_\nu}.$$

On voit que la quantité $2(T_0-T_1)$ est en général différente de $2T'$; mais si, comme nous le supposons, les liaisons introduites brusquement au moment du choc sont toutes *persistantes*, les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_a$ restent nuls après le choc, leurs dérivées

$$(q'_1)_1, \quad (q'_2)_1, \quad \ldots, \quad (q'_a)_1$$

sont *nulles* et dans chacune des expressions (7) et (8) la dernière somme est nulle.

On a donc alors

$$2(T_0 - T_1) = 2T',$$

ce qui démontre le théorème de Carnot sous sa forme générale.

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants;

Par M. E. GUYOU.

Dans l'Introduction historique qui précède le Mémoire sur l'équilibre des corps flottants, publié dans le fascicule II (1895) du présent Journal, M. Duhem a formulé, contre la démonstration élémentaire que j'ai donnée du même sujet dans mon traité de *Théorie du navire*, de graves objections auxquelles je désire répondre quelques mots.

Ces critiques n'ont d'autre origine qu'un simple malentendu; mes raisonnements diffèrent en effet sensiblement de ceux que m'attribue l'auteur du Mémoire.

« M. Guyou démontre d'abord, dit M. Duhem, que si la surface libre n'était pas horizontale *on pourrait* (1) la déformer de manière à abaisser le centre de gravité du système, et cela sans déplacer le flotteur, *ni changer la partie de sa surface qui est immergée.*

» Il démontre, en second lieu, que si le poids du liquide déplacé n'était pas égal au poids du flotteur une translation *convenablement choisie* de ce dernier abaisserait le centre de gravité du système.

» Il démontre, en troisième lieu, que si le centre de gravité n'était pas sur la même verticale que le centre de poussée et au-dessous des métacentres, on *pourrait,* par un déplacement qui n'altérerait pas le volume immergé, abaisser le centre de gravité du système. »

---

(1) Les mots transcrits en *italiques* sont ceux qui modifient les raisonnements, ou plutôt qui en restreignent la généralité.

Enfin M. Duhem a pensé que je ne considérais que des déformations du système infiniment petites et indépendantes les unes des autres.

Ces raisonnements prouvent bien en effet que les conditions auxquelles ils conduisent sont nécessaires; mais ils ne prouvent pas qu'elles soient suffisantes.

Pour rétablir la succession de raisonnements que j'ai eu l'intention d'exposer, il faut d'abord considérer des déformations suffisamment petites, mais finies; et supprimer par suite le deuxième membre de phrase en italiques dans le premier paragraphe ci-dessus.

Il faut ensuite préciser, dans chaque paragraphe, que la déformation par laquelle il est démontré que le centre de gravité s'abaisse est celle qui amène le système dans l'état qu'on a supposé n'être pas réalisé.

On a dès lors considéré quatre états *successifs* du système : un état initial quelconque et les trois états indiqués au début de chaque paragraphe; la série des raisonnements montre que le passage de l'état initial à l'état final peut s'obtenir par trois déformations successives produisant trois abaissements du centre de gravité du système.

De cette manière, la rigueur et la généralité des conclusions relatives à la stabilité ne laissent plus rien à désirer; et il me paraît en être de même de celles qui se rapportent au cône limitant les oscillations permises à un flotteur en équilibre auquel on imprimerait une énergie suffisamment petite, mais finie.

A ces rectifications, je m'empresse d'ajouter que le savant Mémoire de M. Duhem ne constitue pas moins un progrès pour le sujet; le problème qu'il considère est en effet plus général que celui dont je me suis occupé.

Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide;

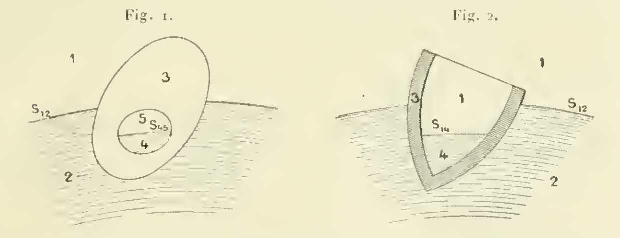
PAR M. P. DUHEM.

Introduction.

A la surface de séparation S_{12} de deux fluides quelconques, 1 et 2, soumis à des forces quelconques, flotte un corps solide 3. Ce corps porte du lest liquide qui y peut être contenu de deux manières :

Tantôt (*fig.* 1), une cavité entièrement close contient deux fluides,

Fig. 1. Fig. 2.



4 et 5, superposés suivant une surface S_{45}, par exemple un liquide et de l'air; tantôt (*fig.* 2) une cavité, librement ouverte dans le fluide 1, renferme une certaine quantité du liquide 4.

Ces deux cas diffèrent à peine au point de vue de la Mécanique, et il sera assurément suffisant de traiter l'un d'eux, le second par exemple; les résultats obtenus s'étendront sans peine au premier.

L'établissement des conditions d'équilibre d'un flotteur qui porte du lest liquide n'offre rien qui soit difficile, ni rien qui soit nouveau. Nous pourrons donc regarder cette question comme résolue et la passer sous silence.

Imaginons que le flotteur et le lest liquide qui y est contenu aient pris leur état d'équilibre; solidifions le lest liquide; il formera, avec le vaisseau qui le porte, un flotteur entièrement solide dont la stabilité pourra être étudiée par les méthodes que nous avons discutées ailleurs. Les conditions de stabilité ainsi obtenues ne sont pas celles qu'il convient de réaliser pour assurer la stabilité du vaisseau portant du lest supposé liquide; le problème qui va nous occuper consiste à rechercher en quoi les secondes conditions diffèrent des premières.

Cette importante question ne paraît pas avoir sollicité les efforts des mécaniciens, jusqu'en 1881, époque où M. Guyou publia, d'abord dans le cours autographié de l'École Navale, puis dans la *Revue maritime*, une étude sur la *Théorie de la variation de la stabilité, ou de la stabilité différentielle*. Cette étude, exposée de nouveau par son auteur dans sa *Théorie du navire* (Paris, 1887), renfermait un important théorème qui résout, pour un cas très particulier, il est vrai, le problème qui nous occupe.

Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier ce problème d'une manière entièrement générale, en faisant usage des méthodes et des formules qui nous ont servi ([1]) à étudier la stabilité d'un flotteur ne contenant pas de liquide ([2]).

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, p. 91; 1895).

([2]) Dans notre précédent Mémoire, nous avions élevé quelques objections contre la théorie de la stabilité des corps flottants donnée par M. Guyou; en réalité, la démonstration de M. Guyou évite ces objections parce que :

1° La translation verticale d'un corps immergé dans un liquide que termine une surface plane élève le centre de gravité du système tant que le poids du liquide déplacé diffère du poids du flotteur, *et cela quelle que soit l'orientation du solide*.

2° La dénivellation du liquide élève le centre de gravité du système, *quelle que soit la position du flotteur*.

Ces deux remarques entraînent l'égalité à zéro des termes dont la présence justifierait, en général, notre objection.

I. — Stabilité d'un flotteur portant du lest liquide et soumis à des forces extérieures quelconques.

Nous nous supposerons placés dans le cas auquel correspond la *fig.* 2. En conservant alors des notations semblables de tout point à celles dont nous avons fait usage dans notre travail *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants,* nous établirons la proposition suivante :

Un flotteur solide 3, *portant du lest liquide* 4, *flotte à la surface de séparation de deux fluides* 1 *et* 2 *que limite une surface close, d'étendue finie, invariable de position et de forme. Pour que l'équilibre d'un tel système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout déplacement virtuel du système, l'inégalité*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 + \int_4 \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2 dv_4 \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{12} \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2 dS_{12} \\ &+ \int_{S_{14}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1 dS_{14} \\ &+ \int_{S_{14}} \rho_4\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_4 dS_{14} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + R > 0. \end{aligned}\right.$$

R est une forme quadratique des six variables δf, δg, δh, δl, δm, δn :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} R = {} & B_{11}(\delta f)^2 + B_{22}(\delta g)^2 + B_{33}(\delta h)^2 \\ & + B_{44}(\delta l)^2 + B_{55}(\delta m)^2 + B_{66}(\delta n)^2 \\ & + B_{23}\,\delta g\,\delta h + B_{31}\,\delta h\,\delta f + B_{12}\,\delta f\,\delta g \\ & + B_{56}\,\delta m\,\delta n + B_{64}\,\delta n\,\delta l + B_{45}\,\delta l\,\delta m \\ & + B_{15}\,\delta f\,\delta m + B_{16}\,\delta f\,\delta n \\ & + B_{26}\,\delta g\,\delta n + B_{24}\,\delta g\,\delta l \\ & + B_{34}\,\delta h\,\delta l + B_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients B_{ij} ont des formes analogues à celles des coefficients A_{ij} considérés dans notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, mais plus compliquées. Tandis que l'on avait, par exemple,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} A_{11} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\, dS_{13} \\ &-\int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dv_3, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} B_{11} = &-\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\, dS_{23} \\ &-\int_{S_{34}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\, dS_{34} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dv_3. \end{aligned}\right.$$

On aperçoit aisément, sur cet exemple, comment chacun des coefficients B_{ij} se déduit du coefficient A_{ij} correspondant.

On peut imaginer des déplacements virtuels qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des trois fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$\begin{gathered} \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} + \int_{S_{14}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{14} = 0, \\ \int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0, \\ \int_{S_{14}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{14} + \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0. \end{gathered}$$

Si l'on remarque que, le long de la surface S_{12}, les densités ρ_1, ρ_2 ont des valeurs constantes r_1, r_2; que, le long de la surface S_{14}, les densités ρ_1, ρ_4 ont des valeurs constantes r'_1, r_4, les conditions précé-

dentes peuvent s'écrire

$$(5)\quad \begin{cases} r_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1\, dS_{12} + r'_1 \int_{S_{14}} \varepsilon_1\, dS_{14} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\ r_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2\, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0, \\ r_4 \int_{S_{14}} \varepsilon_4\, dS_{14} + r_2 \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0. \end{cases}$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer ni déplacer les surfaces de séparation S_{12}, S_{14} des divers fluides. Dans ce cas, les conditions (5) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0, \\ \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2\, dS_{23} = 0, \\ \int_{S_{34}} \rho_4 \varepsilon_4\, dS_{34} = 0. \end{cases}$$

En vertu de l'égalité (11) de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, ces trois conditions (6) deviennent trois relations linéaires et homogènes entre les six variations δf, δg, δh, δl, δm, δn. Voici la première de ces relations :

$$(7)\quad \begin{cases} \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, y)\, dS_{13} \\ \qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} \\ + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\ + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13} \\ + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13} = 0. \end{cases}$$

Les deux autres se déduisent de celle-là en remplaçant l'indice 1 soit par l'indice 2, soit par l'indice 4. Nous les désignerons par (7 *bis*) et (7 *ter*).

En raisonnant comme nous l'avons fait au Chapitre III, § II de notre Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, nous obtiendrons sans peine les conditions suivantes pour la stabilité d'un flotteur qui porte du lest liquide :

I. Conditions nécessaires, mais peut-être insuffisantes. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R *est une forme définie positive lorsqu'on suppose les six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn, *liées par les trois relations* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

II. Conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires. — 1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact de deux fluides appartenant au système; en tout point d'une telle surface où elle est différente de zéro, elle est dirigée vers l'intérieur du plus dense des deux fluides.*

2° *La forme* R, *où les variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *sont indépendantes, est une forme définie positive; ou, du moins, si elle s'annule, c'est pour des valeurs des variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn, *qui ne vérifient pas les égalités* (7), (7 *bis*), (7 *ter*).

II. — Comparaison avec un flotteur portant du lest solide.

Supposons que, le système étant en équilibre, on solidifie le liquide 4. On obtiendra un flotteur entièrement solide. Pour que l'équilibre d'un tel flotteur soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, pour

tout déplacement virtuel du système, l'inégalité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &+\int_{S_{11}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\ &+\int_{S_{11}} \rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12} + T > 0. \end{aligned}\right.$$

T est une forme quadratique des six variables δf, δg, δh, δl, δm, δn,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & C_{11}(\delta f)^2 + C_{22}(\delta g)^2 + C_{33}(\delta h)^2 \\ &+ C_{44}(\delta l)^2 + C_{55}(\delta m)^2 + C_{66}(\delta n)^2 \\ &+ C_{23}\,\delta g\,\delta h + C_{31}\,\delta h\,\delta f + C_{12}\,\delta f\,\delta g \\ &+ C_{56}\,\delta m\,\delta n + C_{64}\,\delta n\,\delta l + C_{45}\,\delta l\,\delta m \\ &+ C_{15}\,\delta f\,\delta m + C_{16}\,\delta f\,\delta n \\ &+ C_{26}\,\delta g\,\delta n + C_{24}\,\delta g\,\delta l \\ &+ C_{34}\,\delta h\,\delta l + C_{35}\,\delta h\,\delta m. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients C_{ij} ont des formes analogues à celles des coefficients A_{ij} ou B_{ij}. On a, par exemple,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} C_{11} = {} & -\int_{S_{11}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{23} \\ & \qquad\qquad -\int_{S_{14}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1, x)\,dS_{14} \\ & + \int_3 \rho_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,dv_3 + \int_4 \rho_4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4; \end{aligned}\right.$$

les autres coefficients C_{ij} ont des formes analogues.

L'expression (10) du coefficient C_{11} peut se transformer.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \int_4 \rho_4 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dv_4 = {} & -\int_4 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\,dv_4 \\ & + \int_{S_{14}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(n_1, x)\,dS_{14} - \int_{S_{34}} \rho_4 \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, x)\,dS_{34}. \end{aligned}$$

Cette égalité et d'autres analogues permettent de transformer l'expression de T. Posons

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m; \end{cases}$$

Δx, Δy, Δz sont les composantes du déplacement du point (x, y, z), si on le suppose invariablement lié au corps solide.

Nous aurons, on le voit sans peine,

$$(12)\qquad \begin{cases} \mathrm{T} = \mathrm{R} \\ \qquad -\int_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right)\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) dv_4 \\ \qquad -\int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ \qquad\qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14} \\ \qquad +\int_{\mathrm{S}_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z\right) \\ \qquad\qquad \times [\cos(n_1, x)\Delta x + \cos(n_1, y)\Delta y + \cos(n_1, z)\Delta z]\, d\mathrm{S}_{14}. \end{cases}$$

Mais on a ([1]), en tout point du fluide 4 en équilibre,

$$\frac{d\,\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4} + \mathrm{V} = \mathrm{C},$$

C étant une constante. On déduit de là

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\Delta z + \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z}\Delta z\right) = 0.$$

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants,* Chap. I, égalité (38) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. I, p. 128).

En vertu de cette égalité, l'égalité (12) peut s'écrire

$$(13)\quad \begin{cases} T = R \\ \quad + \int_4 \frac{d^2 \varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2} \left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z} \Delta z \right)^2 dv_4 \\ \quad - \int_{S_{14}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \right) \\ \qquad \times [\cos(n_1, x) \Delta x + \cos(n_1, y) \Delta y + \cos(n_1, z) \Delta z] \, dS_{14} \\ \quad + \int_{S_{14}} \rho_4 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \right) \\ \qquad \times [\cos(n_1, x) \Delta x + \cos(n_1, y) \Delta y + \cos(n_1, z) \Delta z] \, dS_{14}. \end{cases}$$

Cette expression de la forme T va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Lorsque le flotteur portant le fluide 4 est en équilibre stable, l'équilibre demeure stable si l'on vient à solidifier le fluide 4.

En effet, l'hypothèse de ce théorème revient à supposer que l'inégalité (1) est vérifiée pour tous les déplacements virtuels que l'on peut imposer au système. Or, parmi ces déplacements, figurent évidemment ceux où chaque point matériel du fluide 4 demeure invariablement lié au solide 3. Pour un tel déplacement, on a, en tout point du fluide 4,

$$\delta x = \Delta x \qquad \delta y = \Delta y, \qquad \delta z = \Delta z,$$

Δx, Δy, Δz étant données par les égalités (11); on a aussi

$$\delta \rho_4 = -\left(\frac{\partial \rho_4}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \rho_4}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \rho_4}{\partial z} \Delta z \right).$$

En tout point de la surface S_{14}, on a

$$\varepsilon_1 = \cos(n_1, x) \Delta x + \cos(n_1, y) \Delta y + \cos(n_1, z) \Delta z,$$
$$\varepsilon_4 = -[\cos(n_1, x) \Delta x + \cos(n_1, y) \Delta y + \cos(n_1, z) \Delta z]$$

et l'on peut prendre

$$Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z.$$

Moyennant ces égalités et l'égalité (13), l'inégalité (1) devient identique à l'inégalité (8), ce qui démontre le théorème énoncé.

La réciproque de la proposition précédente n'est pas exacte; il peut se faire que le flotteur, chargé du corps 4 solidifié, soit en équilibre stable et que l'équilibre devienne instable si l'on rend la fluidité au corps 4.

Considérons, en effet, le déplacement le plus général du système où le fluide 4 est supposé solidifié. De ce déplacement, nous pourrons déduire un autre déplacement virtuel du système où le corps 4 a gardé sa fluidité en opérant de la manière suivante :

1° Les quantités δf, δg, δh, δl, δm. δn ont la même valeur en chacun des deux déplacements;

2° Les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont les mêmes dans les deux déplacements;

3° Les quantités Dx, Dy, Dz ont la même valeur, en chaque point de la surface S_{12}, en l'un et l'autre déplacement;

4° Les déplacements Dx, Dy, Dz aux divers points de la surface S_{14} vérifient l'égalité

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{S_{14}} [\cos(n_1, x)\, Dx + \cos(n_1, y)\, Dy + \cos(n_1, z)\, Dz]\, dS_{14} \\ &= \int_{S_{34}} [\cos(N, x)\, \Delta x + \cos(N, y)\, \Delta y + \cos(N, z)\, \Delta z]\, dS_{34}; \end{aligned} \right.$$

5° En tout point du fluide 4, on a

$$\delta\rho_4 = -\left[\frac{\partial\rho_4}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\rho_4}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\rho_4}{\partial z}\Delta z\right].$$

Cherchons à écrire, pour le *second* déplacement virtuel, l'inégalité (1). Nous verrons sans peine que, pour former le premier membre de cette inégalité, il suffit de prendre le premier membre de l'inéga-

lité (12) relative au *second* déplacement virtuel et y ajouter la quantité

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{S_{14}} (\rho_1-\rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\\ &\quad\times[\cos(n_1,x)Dx+\cos(n_1,y)Dy+\cos(n_1,z)Dz]\,dS_{14}\\ &-\int_{S_{14}} (\rho_1-\rho_4)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right)\\ &\quad\times[\cos(n_1,x)\Delta x+\cos(n_1,y)\Delta y+\cos(n_1,z)\Delta z]\,dS_{14}.\end{aligned}\right.$$

Or, on peut aisément montrer que cette quantité (15) peut prendre des valeurs négatives alors que l'égalité (14) est vérifiée; en sorte que l'inégalité (12) peut être vérifiée sans que l'inégalité (1) le soit.

Supposons, en effet, que l'on ait, dans le premier déplacement virtuel,

$$\int_{S_{14}} [\cos(N,x)\Delta x+\cos(N,y)\Delta y+\cos(N,z)\Delta z]=0,$$

égalité qui constitue une relation linéaire et homogène entre les six variables

$$\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n.$$

On pourra alors satisfaire à la condition (14) en prenant, en tout point de la surface S_{14},

$$Dx=0,\qquad Dy=0,\qquad Dz=0.$$

La quantité (15) se réduira à son second terme que l'on pourra écrire

$$\int_{S_{14}} (\rho_1-\rho_4)\frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)\Delta x+\cos(n_1,y)\Delta y+\cos(n,z)\Delta z]^2\,dS_{14}.$$

Or, les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre des fluides 1 et 4, considérés comme seuls mobiles, nous enseignent que cette quantité est forcément négative.

La proposition énoncée est donc démontrée.

III. — Cas où les forces agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont homogènes.

Considérons maintenant le cas particulier où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides 1, 2, 4 sont sensiblement homogènes, soit qu'ils offrent, comme les liquides, une compressibilité négligeable, soit que leur faible densité varie très peu avec la hauteur, comme il arrive pour les gaz.

Prenons l'axe des z vertical et dirigé vers le haut.

Soient

S'_{12} la section que le plan S_{12} prolongé détermine dans l'espace clos occupé par les corps 1 et 4;

Σ, l'aire de cette section;

σ, l'aire de la surface S_{14};

$\mu = M_3 + M_4$, la masse de l'ensemble des corps 3 et 4;

ζ, la cote du centre de gravité de cette masse;

Z, la cote du centre de gravité de la masse des fluides 1 et 2 déplacés par les corps 3 et 4.

Des calculs semblables à ceux que nous avons développés dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants* (Chap. III, § V) nous donneront aisément l'égalité suivante

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
R = {} & g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\partial h)^2 \\
& + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\, dS_{14}\right](\partial l)^2 \\
& + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} x^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} x^2\, dS_{14}\right](\partial m)^2 \\
& - 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\, dS_{14}\right]\partial l\, \partial m \\
& + 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y\, dS_{14}\right]\partial h\, \partial l \\
& - 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} x\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_1} x\, dS_{14}\right]\partial h\, \partial m.
\end{aligned}
\right.
$$

Les conditions (7), (7 *bis*), (7 *ter*) prennent les formes suivantes :

$$(17)\quad (\Sigma - \sigma)\delta h + \left(\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} - \int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta l - \left(\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} - \int_{S_{14}} y\,dS_{14}\right)\delta m = 0,$$

$$(18)\quad \begin{cases} \Sigma\,\delta h + \delta l \displaystyle\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} - \delta m \int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} = 0, \\ \sigma\,\delta h + \delta l \displaystyle\int_{S_{14}} y\,dS_{14} - \delta m \int_{S_{14}} x\,dS_{14} = 0. \end{cases}$$

L'égalité (17) est une conséquence des égalités (18), qui doivent seules être conservées.

L'inspection des égalités (16) et (18) montre immédiatement que l'on ne pourra pas, en général, raisonner dans le cas qui nous occupe comme nous l'avons fait pour traiter la stabilité d'un corps solide et pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides pesants et homogènes. On ne pourra étendre ces raisonnements au cas qui nous occupe actuellement que dans le cas où il sera possible de choisir les axes coordonnés de telle façon que l'on ait à la fois

$$\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} = 0, \qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} = 0,$$

$$\int_{S_{14}} x\,dS_{14} = 0, \qquad \int_{S_{14}} y\,dS_{14} = 0,$$

c'est-à-dire *dans le cas où le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau* S'_{12} *et le centre de gravité de l'aire de la surface* S_{14} *qui limite le fluide 4 sont sur une même verticale.*

Dans ce cas, *si nous prenons cette verticale pour axe des* z, la forme quadratique R deviendra

$$(19)\quad \begin{cases} R = g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\ \quad + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta l)^2 \\ \quad + g\left[\mu(Z - \zeta) + (\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\,dS_{14}\right](\delta m)^2 \\ \quad - 2g\left[(\rho_2 - \rho_1)\displaystyle\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\,dS_{14}\right]\delta l\,\delta m. \end{cases}$$

tandis que les conditions (17) et (18) se réduiront à

$$\delta h = 0. \tag{20}$$

Moyennant la condition indiquée en italiques, on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit : 1° *que le fluide* 1 *soit moins dense que les fluides* 2 *et* 4; 2° *que la forme quadratique en* δl, δm,

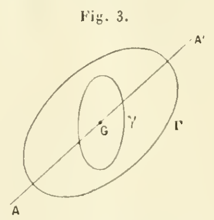
$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{U} = &\left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta)+(\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} y^2\,d\mathrm{S}'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} y^2\,d\mathrm{S}_{14}\right](\delta l)^2 \\ &+\left[\mu(\mathrm{Z}-\zeta)+(\rho_2-\rho_2)\int_{\mathrm{S}'_{12}} x^2\,d\mathrm{S}'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} x^2\,d\mathrm{S}_{14}\right](\delta m)^2 \\ &-2\left[(\rho_2-\rho_1)\int_{\mathrm{S}'_{12}} xy\,d\mathrm{S}'_{12}-(\rho_4-\rho_1)\int_{\mathrm{S}_{14}} xy\,d\mathrm{S}_{14}\right]\delta l\,\delta m \end{aligned} \right.$$

soit une forme définie positive.

Dans le cas que nous venons de préciser, la solution du problème relatif à la stabilité d'un vaisseau qui porte du lest liquide est complète; mais on voit combien ce cas est particulier, si on le compare à la généralité de la solution obtenue depuis longtemps dans le cas où le flotteur ne porte pas de lest liquide.

La condition que nous venons d'obtenir peut s'interpréter géométriquement :

Fig. 3.



Sur le plan de flottaison traçons la ligne de flottaison Γ (*fig.* 3), entourant l'aire Σ; sur le même plan, projetons l'aire σ, dont la pro-

jection est circonscrite par la ligne γ. Les deux aires Σ, σ ont, par hypothèse, le même centre de gravité G.

Recouvrons l'aire Σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_1)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe variable AA', situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA', une valeur minima j.

La condition précédente équivaut à celle-ci

$$Z - \zeta + \frac{j}{\mu} > 0$$

ou

$$\zeta < Z + \frac{j}{\mu}. \tag{22}$$

Supposons que l'on solidifie le fluide 1. Soit i le plus petit moment d'inertie par rapport à l'axe variable AA' de la seule aire Σ recouverte du fluide fictif de densité positive $(\rho_2 - \rho_1)$. La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'équilibre du flotteur s'exprimerait par l'inégalité

$$\zeta < Z + \frac{i}{\mu}. \tag{23}$$

Or, on a évidemment

$$j < i.$$

Donc, pour que l'inégalité (22) soit vérifiée, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'inégalité (23) le soit également; on a ici un exemple de la proposition générale énoncée au § II.

La proposition que nous venons de démontrer renferme comme cas particulier le théorème énoncé par M. Guyou.

La condition, indiquée en italiques, à laquelle le théorème précédent doit son exactitude, lui ôte tout intérêt au point de vue de la construction navale; cette condition, en effet, ne sera presque jamais remplie dans les divers cas qu'offre la pratique (navire dont un ou plusieurs compartiments étanches sont *partiellement* noyés, porteur de pétrole dont une ou plusieurs caisses sont *incomplètement* remplies, etc.). Cette lacune, toutefois, peut être en partie comblée si l'on

observe que l'architecture navale a surtout besoin de connaître une condition *suffisante*, qui l'assure de la stabilité d'un navire, la condition *nécessaire et suffisante* constituant un idéal dont elle peut, à la rigueur, se passer.

Nous savons qu'*il suffit*, pour la stabilité du navire, que la forme quadratique R soit une forme définie positive, *bien que cette condition ne soit peut-être pas nécessaire*.

Or l'expression de la forme R peut se simplifier.

Sur le plan de flottaison, traçons la ligne de flottaison Γ (*fig.* 3), entourant l'aire Σ; sur le même plan, projetons l'aire σ, dont la projection est circonscrite par la ligne γ. Recouvrons l'aire Σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *positive* $(\rho_2 - \rho_1)$; recouvrons l'aire σ d'un fluide fictif ayant une densité superficielle *négative* $(\rho_1 - \rho_4)$.

Soit G *le centre de gravité du système fictif ainsi constitué;* nous porterons en G l'origine des coordonnées, ce qui, dans la forme R, fera disparaître les termes en $\delta h\, \delta l$ et $\delta h\, \delta m$.

Cherchons le moment d'inertie du système fictif par rapport à un axe variable AA', situé dans le plan de flottaison et passant par le point G. Ce moment d'inertie a, pour une certaine orientation de l'axe AA', une valeur maxima (positive ou négative) J et pour une autre orientation une valeur minima (positive ou négative) j. Prenons la première orientation pour axe des x, la seconde pour axe des y. Le terme en $\delta l\, \delta m$ disparaîtra dans l'expression de R qui se réduira à

$$\begin{aligned} V = {} & g(\rho_2 - \rho_1)\Sigma(\delta h)^2 \\ & + g[\mu(Z-\zeta)+J](\delta l)^2 + g[\mu(Z-\zeta)+j](\delta m)^2. \end{aligned}$$

Il est *suffisant*, pour la stabilité de l'équilibre du navire, que la forme V soit une forme définie positive. Pour que la forme V soit une forme définie positive, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'on ait l'inégalité

$$Z + \frac{j}{\mu} - \zeta > 0.$$

Nous pourrons donc énoncer de la manière suivante une CONDITION QUI SUFFIT A ASSURER LA STABILITÉ D'UN NAVIRE PORTANT DU LEST LIQUIDE :

On considère le navire dans son assiette d'équilibre, en le supposant chargé du lest liquide;

On projette sur un même plan horizontal la surface de flottaison Σ et la surface terminale σ du lest liquide;

On recouvre la surface Σ d'un fluide fictif de densité superficielle positive $(\rho_2 - \rho_1)$ et la surface σ d'un fluide fictif de densité superficielle négative $(\rho_1 - \rho_4)$. On cherche le centre de gravité G de ce système fictif, puis son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal variable passant par le point G; soit j la plus petite valeur, positive ou négative, de ce moment d'inertie. La cote du centre de gravité du navire et du lest liquide qu'il porte doit être inférieure à la cote du centre de gravité des fluides 1 et 2 déplacés, cette dernière cote étant augmentée du quotient $\frac{j}{\mu}$ de la quantité j par la masse totale du navire et du lest liquide.

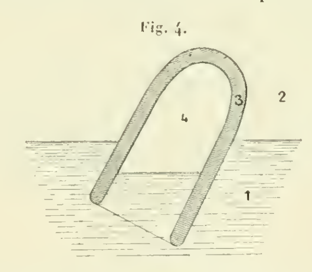
Cette règle s'étend sans peine au cas où le lest liquide forme plusieurs masses distinctes, de même densité ou de densités différentes.

IV. — Stabilité d'une cloche à plongeur. — Cas de la pesanteur.

A la surface de séparation d'un liquide 1 et d'un gaz 2, flotte une cloche renversée 3, qui renferme un fluide 4.

Nous pourrions traiter directement et complètement le problème de

Fig. 4.



la stabilité d'un pareil système. Mais nous nous bornerons à étudier le cas où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur et où les fluides sont supposés homogènes. Dans ce cas, on voit sans peine que le problème qui nous occupe actuellement se ramène au problème précédent, à la condition de changer z en $(-z)$ et g en

$(-g)$. Nous pouvons donc en donner immédiatement la solution, du moins lorsqu'il est possible de l'obtenir.

Pour qu'il soit possible de résoudre entièrement ce problème, *il faut que l'aire de la section à fleur d'eau et l'aire de la surface qui sépare les fluides* 1 *et* 4 *aient leurs centres de gravité sur la même verticale.*

Si cette condition est réalisée, on peut énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :

1° *Que le fluide* 1 *soit plus dense que les fluides* 2 *et* 4;

2° *Que la forme quadratique en* δl, δm,

$$(24)\qquad \begin{aligned} W = & \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} y^2\, dS_{14}\right](\delta l)^2 \\ & + \left[\mu(\zeta - Z) + (\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} x^2\, dS_{14}\right](\delta m)^2 \\ & - 2\left[(\rho_2 - \rho_1)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12} - (\rho_4 - \rho_1)\int_{S_{14}} xy\, dS_{14}\right]\delta l\, \delta m, \end{aligned}$$

soit une forme définie négative.

On interprète aisément cette condition sous la forme que voici :

Projetons les deux aires Σ, σ sur un plan horizontal. Les deux projections ont même centre de gravité G.

Recouvrons la première d'une densité superficielle positive $(\rho_1 - \rho_2)$ et la seconde d'une densité superficielle négative $(\rho_4 - \rho_1)$.

Cherchons le moment d'inertie de ce système fictif par rapport à un axe horizontal variable AA' passant par le point G; soit j la valeur minima de ce moment d'inertie. La condition précédente équivaut à l'inégalité

$$(25)\qquad \zeta < Z + \frac{j}{\mu}.$$

Si la condition indiquée en italiques n'est pas remplie, nous n'aurons plus, en général, de condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de la cloche; mais nous pourrons, comme dans le cas précédent, obtenir une condition simplement suffisante de même forme.

Sur un théorème de Kronecker;

Par M. G. KOENIGS.

---

1. Soient F_1, F_2, F_3 trois fonctions de x, y, z finies, continues et uniformes dans une région de l'espace dont nous conviendrons de ne pas sortir.

Posons

$$X = \begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\|$$

et pareillement

$$Y = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\|, \qquad Z = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\|.$$

Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}. \tag{1}$$

Les intégrales du système (1) vérifient l'équation

$$\mathcal{A}(\theta) = X\frac{\partial\theta}{\partial x} + Y\frac{\partial\theta}{\partial y} + Z\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Or $\mathcal{A}(\theta)$ peut s'écrire

$$(3) \qquad \mathcal{A}(\theta) = F_1 \frac{D(\theta, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} + F_2 \frac{D(\theta, F_3 F_1)}{D(x, y, z)} + F_3 \frac{D(\theta, F_1, F_2)}{D(x, y, z)},$$

en adoptant la notation connue pour les déterminants fonctionnels.

Si l'on pose, pour abréger, $\Delta = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$, on trouve, en faisant $\theta = F_1$, F_2 ou F_3 dans l'équation (3), la relation

$$(4) \qquad \mathcal{A}(F_i) = \Delta F_i$$

ou encore

$$(5) \qquad \mathcal{A}(\log F_i) - \Delta = 0.$$

Désignons maintenant par M un multiplicateur, au sens de Jacobi, du système d'équations (1). La fonction M vérifie l'équation

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\mathcal{A}(\log M) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

L'expression de X permet de calculer très facilement $\frac{\partial X}{\partial x}$; on trouve

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial x} \right\|,$$

et de même

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \right\|,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial z \partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z} \right\|,$$

d'où résulte par addition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 3\Delta.$$

L'équation du multiplicateur s'écrit donc

$$(6) \qquad \mathcal{A}(\log M) + 3\Delta = 0.$$

Si l'on rapproche cette équation de l'équation (5) on voit que $\frac{1}{F_1^3}$, $\frac{1}{F_2^3}$, $\frac{1}{F_3^3}$ sont trois multiplicateurs.

Mais le quotient de deux multiplicateurs est une intégrale; en conséquence $\frac{F_2}{F_1}$, $\frac{F_3}{F_1}$ sont deux intégrales, et l'on en conclut que l'intégrale générale a cette expression $\varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$, car on ne suppose pas qu'il existe une relation entre F_1, F_2 et F_3.

D'un autre côté, on déduit tout multiplicateur de l'un d'eux en le multipliant par l'intégrale générale. Dès lors

$$\frac{1}{F_1^3}\varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$$

est l'expression générale du multiplicateur.

On voit donc que tout multiplicateur du système (1) est une fonction homogène de degré -3 de F_1, F_2, F_3 et réciproquement toute fonction de cette nature est un multiplicateur.

Prenons en particulier, pour le multiplicateur M, la forme que voici :

$$M_0 = \frac{1}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}};$$

de la relation

$$\frac{\partial(M_0 X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_0 Y)}{\partial y} + \frac{\partial(M_0 Z)}{\partial z} = 0,$$

on conclut que l'intégrale de surface

$$I = \iint M_0 (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy)$$

ne dépend que du contour ou qu'elle est nulle suivant toute surface fermée S ne contenant dans son intérieur aucun point de discontinuité.

Les seuls points de discontinuité sont ceux qui annulent $\frac{1}{M_0}$, c'est-à-dire qui rendent F_1, F_2, F_3 nuls. Supposons qu'à l'intérieur de S il y ait p de ces points qui rendent positif le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et n qui le rendent négatif; l'intégrale I a alors pour valeur

$$I = 4\pi(p - n):$$

tel est le théorème de Kronecker ([1]).

2. Mais la méthode même que nous venons de suivre nous montre la possibilité d'étendre la proposition de Kronecker en prenant au lieu de M_0 d'autres multiplicateurs.

Prenons, par exemple, pour multiplicateur l'expression $\frac{1}{\Omega^{\frac{3}{2}}}$, où Ω désigne une forme quadratique de F_1, F_2, F_3 définie et positive, en sorte que Ω ne s'annule qu'avec F_1, F_2, F_3. Désignons par ω le discriminant de la forme Ω. On obtient une première extension de la proposition de Kronecker sous la forme suivante :

L'intégrale de surface

$$I = \int\int \frac{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}},$$

prise suivant une surface fermée S, *a pour valeur*

$$4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}},$$

où ω *est le discriminant de* Ω, p *le nombre des points intérieurs à* S *qui annulent* F_1, F_2, F_3 *en rendant* $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ *positif et* n *le nombre de ceux de ces mêmes points qui rendent* $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ *négatif.*

La démonstration est des plus faciles.

([1]) Voir le *Traité* de M. Émile Picard, t. I, p. 123.

Puisque Ω est une forme définie positive, on ramènera Ω à la forme

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$$

par la substitution linéaire

$$\begin{aligned} F_1 &= a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3, \\ F_2 &= a'\Phi_1 + b'\Phi_2 + c'\Phi_3, \\ F_3 &= a''\Phi_1 + b''\Phi_2 + c''\Phi_3. \end{aligned}$$

Désignons par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les déterminants analogues à X, Y, Z, mais où Φ_1, Φ_2, Φ_3 remplacent F_1, F_2, F_3; désignons enfin par ρ le déterminant

$$\rho = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

On a

$$X = \rho\mathfrak{X}, \qquad Y = \rho\mathfrak{Y}, \qquad Z = \rho\mathfrak{Z},$$

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} = \rho \frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}.$$

Enfin, puisque 1 est le discriminant de la forme $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$ et ω celui de la forme Ω, on a

$$\rho^2 \omega = 1,$$

d'où

$$\rho = \pm \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Si $\rho = \frac{+1}{\sqrt{\omega}}$, on a

$$\begin{aligned} I &= \int\int \frac{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int\int \frac{\mathfrak{X}\,dy\,dz + \mathfrak{Y}\,dz\,dx + \mathfrak{Z}\,dx\,dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Kronecker, on a

$$\int\int \frac{\mathfrak{X}\,dy\,dz + \mathfrak{Y}\,dz\,dx + \mathfrak{Z}\,dx\,dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)} = (p - n)4\pi,$$

où p est le nombre des points qui annulent Φ_1, Φ_2, Φ_3 (ou F_1, F_2, F_3) en rendant $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ $\left[\text{ou } \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} \text{ qui est de même signe}\right]$ positif et n le nombre de ceux de ces points qui donnent, au contraire, un résultat négatif.

On a donc bien dans ce cas

$$I = 4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}}.$$

Si maintenant $\rho = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}$, $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ sont de signes contraires. Soenit p le nombre des points intérieurs à la surface S d'intégration qui rendent $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ positif et n le nombre de ceux qui rendent ce déterminant négatif. On aura, eu égard à l'interversion des signes quand on passe des F_i aux Φ_i,

$$I_0 = \int\int \frac{\mathfrak{X}\, dy\, dz + \mathfrak{Y}\, dz\, dx + \mathfrak{Z}\, dx\, dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}} = (n - p) \times 4\pi;$$

et l'on a ici

$$I = \rho I_0 = -\frac{I_0}{\sqrt{\omega}} = 4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}},$$

comme dans le premier cas.

5. Nous allons maintenant traiter le cas général et nous serons amené à un résultat tout à fait analogue.

Soit P une fonction de F_1, F_2, F_3, homogène et du degré 3 d'homogénéité. Nous considérons l'intégrale

$$I = \int\int \frac{X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy}{P},$$

prise suivant une surface fermée S, à l'intérieur de laquelle P ne s'annule qu'avec F_1, F_2, F_3, sans qu'en aucun de ces points le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ s'annule.

Pour p de ces points ce déterminant sera positif, pour n autres négatif.

L'intégrale I sera la somme des $p+n$ intégrales prises chacune suivant une très petite surface fermée entourant chacune un des points précédents.

Soit un de ces points que nous pouvons supposer être à l'origine des coordonnées; on aura dans le voisinage de ce point

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots, \\ F_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots, \\ F_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au premier. On a de plus

$$a_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0, \qquad b_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0, \qquad c_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0,$$

en sorte que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

n'est autre que le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ pour les valeurs particulières $x = y = z = 0$.

Le calcul de X, Y, Z donne alors, en s'en tenant aux termes du premier ordre, approximation qui se justifie aisément (*voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, p. 125),

$$X = \Delta . x, \qquad Y = \Delta . y, \qquad Z = \Delta . z,$$

tandis que l'on a

$$P = P(a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ a_3 x + b_3 y + c_3 z),$$

et l'intégrale de surface autour du point considéré s'écrira

$$I_1 = \Delta . \iint \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{P(a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ a_3 x + b_3 y + c_3 z)}.$$

Si l'on choisissait, par exemple, une petite sphère de rayon très petit r, l'intégrale s'écrirait, $d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère

$$I_1 = \Delta . \iint \frac{r\,d\sigma}{P}.$$

Comme $\iint \frac{r\,d\sigma}{P}$ a une valeur essentiellement positive, *on voit que* I_1 *aura le signe de* Δ.

Pour calculer l'intégrale double nous ferons le changement de variables

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = x',$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = y',$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = z';$$

on trouve aisément que l'intégrale

$$\iint \frac{x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy}{P(a_1 x + \ldots,\ a_2 x + \ldots,\ a_3 x + \ldots)},$$

qui est positive comme nous venons de le voir, se change en

$$\iint \frac{x'\,dy'\,dz' + y'\,dx'\,dz' + z'\,dx'\,dy'}{\Delta P(x', y', z')},$$

en sorte que la valeur absolue de I_1 est l'intégrale

$$\iint \frac{x'\,dy'\,dz' + y'\,dx'\,dz' + z'\,dx'\,dy'}{P(x', y', z')},$$

effectuée suivant une surface fermée, par exemple une sphère entourant le point $x' = y' = z' = 0$. Plaçons en ce point le centre de la sphère; posons $x' = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y' = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z' = \rho\cos\theta$, l'inté-

grale devient

$$\iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{P(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)} = \alpha;$$

car ρ disparaît parce que P est homogène et du degré 3 d'homogénéité. Donc enfin I_1 est égal à $\pm\alpha$ selon que Δ est positif ou négatif.

Conséquemment, l'intégrale I, relative à la surface S qui comprend p points à déterminant positif et n à déterminant négatif, aura pour expression

$$\alpha(p-n).$$

Telle est la généralisation du théorème de Kronecker, qu'il serait du reste aisé d'étendre au cas de plus de trois variables.

Quant à α, c'est une intégrale définie qu'il serait peut-être intéressant d'étudier comme fonction des coefficients qui figurent dans P.

La présente Note répond, comme on voit, à certains *desiderata* que laissait subsister le théorème de Kronecker et que M. Émile Picard avait formulés à la fin de sa démonstration (*Traité d'Analyse*, t. I, p. 127). Plus récemment, dans les *Comptes rendus* et dans le Tome III de son *Traité*, M. Picard a introduit une modification importante qui permet d'évaluer le nombre exact des racines comprises dans un contour ou dans une surface. Mais les remarques précédentes s'appliquent aussi bien au théorème dû à M. Picard.

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux;

Par M. A. MANNHEIM.

Soient (E) la surface du second ordre de centre o, m un point de cette surface, N la normale en ce point.

Je me propose de construire pour le point m les éléments de courbure de (E), c'est-à-dire les centres de courbure principaux de cette surface qui sont sur N et les axes de l'indicatrice N′, N″ de (E) pour m. Je vais démontrer pour cela le théorème suivant :

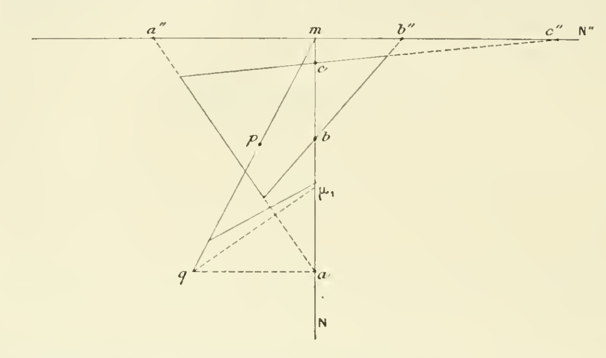
1. *Du point a où N rencontre l'un des plans principaux de* (E), *on mène un plan perpendiculaire à cette droite. Il coupe le diamètre om en un point α d'où l'on abaisse, sur le plan principal qui contient a, la perpendiculaire* A. *De même les points de rencontre b, c de* N *et des plans principaux de* (E) *conduisent à des droites* B, C : *les droites* M_1, M_2, *perpendiculaires à* N *et qui rencontrent* A, B, C, *sont parallèles aux axes de l'indicatrice* N′, N″ *et leurs pieds* μ_1, μ_2 *sur* N *sont les centres de courbure principaux de* (E) *pour le point m.*

Prenons pour plan de la figure le plan des droites N, N″. Sur N, on a les points a, b, c où cette droite rencontre les plans principaux de (E); de même sur N″, on a a'', b'', c''.

Les droites aa'', bb'', cc'' sont les traces du plan (N, N″) sur les plans

principaux de (E), et le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois droites est la projection du centre o sur le plan de la figure.

J'ai démontré (¹) que les droites N, N'', aa'', bb'', cc'' sont tangentes à une parabole qui touche N au point μ_1 centre de courbure de la section principale faite dans (E) par le plan (N, N''). Menons à cette parabole une tangente infiniment voisine de N; elle détermine, avec cette droite et aa'', un triangle circonscrit à la parabole et dont le point de rencontre des hauteurs est sur la directrice mp de cette courbe. On obtient ce point à la rencontre de la perpendiculaire élevée de a à N et de la perpendiculaire abaissée de μ_1 sur aa''.



On peut dire alors que la perpendiculaire élevée de a à N rencontre la directrice mp en un point q, et que la perpendiculaire abaissée de ce point sur aa'' coupe N au centre de courbure μ_1.

De là résulte que le plan, élevée de a perpendiculairement à N, rencontre le diamètre mo (dont la projection est mp) en un point (dont la projection est q) et que la droite A, abaissée de ce point sur le plan principal qui contient a (droite A dont la projection est $q\mu_1$) rencontre la perpendiculaire M_1 élevée de μ_1 au plan de la figure.

On peut répéter la même chose en partant des points b, c et l'on

(¹) Dans ce *Journal*, 3ᵉ série, t. VIII, p. 167, et dans mon Ouvrage : *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 451.

trouve ainsi des droites B, C qui rencontre aussi M_1. De la même manière en prenant le plan (N, N′) pour plan de la figure, on arrive à une droite M_2 qui rencontre A, B, C, N et dont le pied sur cette dernière droite est le centre de courbure μ_2 de la section principale faite dans (E) par le plan (N, N′).

Ainsi : les droites M_1, M_2 parallèles à N′, N″ rencontrent A, B, C, N et leurs pieds μ_1, μ_2 sur cette dernière droite sont les centres de courbure demandés. Le théorème **1** est donc démontré.

On voit que cette démonstration repose sur une propriété relative à une parabole et à deux tangentes à cette courbe. Cette même propriété conduit encore dans l'espace à un autre théorème.

On peut considérer le point q comme la projection, sur le plan de la figure, de la droite d'intersection L du plan élevé de a perpendiculairement à N et du plan (o, N′). Le plan, qui projette L sur le plan principal qui contient a, coupe N au point μ_1, puisque, perpendiculaire au plan de la figure, ce plan se projette suivant $q\mu_1$.

On obtient ainsi ce théorème auquel Laguerre est arrivé analytiquement [1] :

2. *Le plan élevé de a perpendiculairement à* N *coupe le plan* (o, N′) *suivant une droite : le plan mené par cette droite, perpendiculairement au plan principal de* (E) *qui contient a, coupe* N *au centre de courbure* μ_1.

Ce théorème ne permet de déterminer les centres de courbure μ_1, μ_2 que lorsqu'on connaît les axes de l'indicatrice N′, N″, tandis que mon théorème donne à la fois les axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux. Je vais montrer que ce dernier théorème peut se déduire du théorème **2**.

J'ai appelé L la droite d'intersection du plan (o, N′) et du plan élevé de a perpendiculairement à N. Pour chacun des points de rencontre de N avec les plans principaux de (E), il existe une droite telle que L et ces trois droites sont parallèles à N′. Les plans, qui les projettent respectivement sur les plans principaux de (E), comme il a été dit, passent par μ_1 ; ils se coupent alors suivant une même droite M_1 issue

[1] Dans ce *Journal*, 3e série, t. IV, p. 251.

de μ_1 et parallèle à N'. Du point α, où le plan mené de a perpendiculairement à N coupe le diamètre om, abaissons la perpendiculaire A sur le plan principal qui contient a. Puisque α est un point de L, la droite A est dans le plan projetant cette droite et dont il vient d'être parlé. La droite A rencontre alors M_1.

De même, aux autres points de rencontre de N avec les plans principaux de (E) correspondent des droites B, C qui rencontrent aussi M_1.

En employant le plan (o, N'') comme on vient d'employer le plan (o, N') on trouve que les droites A, B, C rencontrent M_2 parallèle à N'' et dont le pied sur N est le centre de courbure μ_2.

Les droites M_1, M_2, issues de μ_1 et μ_2, sont donc des perpendiculaires à N qui l'une et l'autre rencontrent A, B, C : le théorème **1** est donc obtenu en partant du théorème **2**.

En employant l'hyperboloïde qui a pour directrices A, B, C, on peut dire :

3. *Les génératrices de l'hyperboloïde* (A, B, C), *qui rencontrent* N *à angle droit, sont parallèles aux axes de l'indicatrice de* (E) *en m et leurs pieds sur* N *sont les centres de courbure principaux de* (E).

On n'a ainsi qu'une solution théorique du problème en question, car il reste encore à montrer comment on peut construire effectivement les éléments de courbure de (E).

Les directrices A, B, C de l'hyperboloïde étant parallèles aux axes de (E), qui sont les arêtes d'un trièdre trirectangle, cet hyperboloïde est équilatère.

Les droites M_1, M_2, génératrices de cette surface, sont perpendiculaires l'une à l'autre; comme N leur est perpendiculaire, cette droite est une génératrice de l'hyperboloïde.

Les points μ_1, μ_2 sont alors les points de rencontre de génératrices qui se rencontrent à angle droit; ils appartiennent à la sphère (S) lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'hyperboloïde. Construisons alors la sphère (S). Pour cela, menons par les droites A, B des plans parallèles à C : ces plans se coupent suivant une droite C' qui est une génératrice de l'hyperboloïde. On a de même A' et B'. Les points de rencontre de A', B', C' et de A, B, C appartiennent à (S).

Cette sphère est alors circonscrite au prisme droit dont ces six droites sont des arêtes et elle est facile à construire.

4. *Cette sphère* (S) *coupe* N *aux points* μ_1, μ_2, *centres de courbure principaux de* (E).

Ces points étant déterminés, il suffit d'ajouter :

5. *Les perpendiculaires à* N, *élevées des points* μ_1, μ_2 *et qui rencontrent* A *ou* B *ou* C, *sont parallèles aux axes de l'indicatrice de* (E) *pour le point* m.

Les éléments de courbure de (E) sont donc construits.

Sur l'équilibre et les mouvements des mers;

Par M. H. POINCARÉ.

Introduction.

Le problème des marées présente une telle complication qu'il ne peut guère être abordé du premier coup dans toute sa généralité et qu'il convient de partager la difficulté. Il faudrait tenir compte à la fois de l'attraction des astres, de celle du bourrelet liquide qu'ils soulèvent, de l'inertie du liquide, de la présence des continents, de la rotation du globe et de la force centrifuge composée, etc.

Peut-être serait-ce s'acheminer vers la solution complète que d'examiner séparément chacune de ces difficultés et de chercher à résoudre le problème quand on n'a à triompher que d'une seule d'entre elles.

Si les astres étaient fixes par rapport à la Terre et entraînés dans son mouvement de rotation, le problème serait beaucoup plus simple, puisque la surface des océans prendrait une position d'équilibre dont elle ne s'écarterait plus. On n'aurait plus alors à tenir compte ni de l'inertie du liquide, ni de la force centrifuge composée et l'on serait ramené à une simple question de Statique.

On pourrait encore se contenter de cette approximation si le mouvement des astres était très lent; les mers prendraient alors une forme très peu différente de leur figure d'équilibre.

Malheureusement il n'en est pas ainsi et cependant la solution de cette question peut avoir une importance pratique; les oscillations réelles des mers peuvent être regardées comme la superposition d'un

grand nombre d'oscillations périodiques, les unes à courte, les autres à longue période. Chacune de ces oscillations partielles se comporte comme si elle était seule. Les oscillations à très longue période peuvent alors se calculer par la méthode statique. C'est ce qu'ont très bien aperçu lord Kelvin et M. Tait (*Cf.* Tait et Thomson, *Traité de Philosophie naturelle*).

Cette étude statique serait extrêmement simple si les océans recouvraient toute la surface de la Terre; l'emploi des fonctions sphériques donnerait une solution immédiate, soit que l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, soit qu'on en tienne compte.

La présence des continents complique le problème; si l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, il suffit d'appliquer une correction très simple; c'est ce qu'ont fait Tait et Thomson.

J'ai voulu le traiter en tenant compte à la fois de l'attraction du bourrelet et de la présence des continents; j'y suis parvenu en introduisant certaines fonctions dont les propriétés rappellent celles des fonctions sphériques, mais qui dépendent de la forme des continents.

Je me suis occupé ensuite des oscillations à courte période, mais *en négligeant d'abord l'attraction du bourrelet liquide.* Il est d'abord aisé de voir que l'étude des oscillations éprouvées par la mer sous l'influence des mouvements des astres se ramène à celle de ses oscillations propres, c'est-à-dire de celles qu'elle éprouverait, *si elle était soustraite à cette influence* et si elle était écartée de sa figure d'équilibre, puis abandonnée à elle-même. C'est ainsi que l'intégration des équations différentielles linéaires à second membre se ramène à l'intégration des équations sans second membre.

J'ai donc été conduit à étudier les oscillations propres d'un liquide. J'ai supposé d'abord que ce liquide était enfermé dans un vase assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface d'équilibre; j'ai distingué le cas où la profondeur est finie et celui où elle est infiniment petite.

J'ai abordé ensuite le cas où le vase est assez grand pour qu'on doive regarder la surface d'équilibre comme sphérique.

J'ai fait ressortir l'analogie de ce problème avec celui des vibrations d'une membrane tendue dont je me suis occupé dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Enfin j'ai abordé un problème se rapprochant beaucoup plus de la réalité et j'ai tenu compte de la rotation du Globe et de la force centrifuge composée.

1. — Équilibre des mers.

Soit V_1 le potentiel dû à la sphère terrestre, V_2 celui qui est dû au bourrelet liquide, $+\varphi$ celui qui est dû aux astres et à la force centrifuge. Le potentiel total $V_1 + V_2 + \varphi$ devra être égal à une constante C à la surface de la mer qui différera d'ailleurs peu d'une sphère

$$V_1 + V_2 + \varphi = C.$$

Soit ρ la densité de la sphère terrestre, 1 son rayon, h l'épaisseur du bourrelet, de telle façon que la distance de la surface de la mer au centre de la Terre soit $1 + h$; nous aurons

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho(1+h)^{-1} = \frac{4}{3}\pi\rho - \frac{4}{3}\pi\rho h.$$

Soit σ la densité du liquide, V_2 pourra être regardé comme le potentiel d'une surface attirante; cette surface pourra être confondue avec celle de la sphère terrestre et la densité superficielle de la matière attirante sera σh.

Si j'envisage la dérivée $\frac{dV_2}{dr}$, elle aura des valeurs différentes en un point très voisin de la sphère, mais intérieur, et en un point très voisin de la sphère, mais extérieur. Pour éviter toute confusion, je désignerai par $\frac{dV_2}{dr}$ la dérivée en un point intérieur et par $\frac{dV'_2}{dr}$ la dérivée en un point extérieur; il viendra alors

$$\frac{dV_2}{dr} - \frac{dV'_2}{dr} = 4\pi\sigma h.$$

D'autre part, si V_2 à la surface de la sphère est développée en série de fonctions sphériques et que l'on ait

$$V_2 = \Sigma V_n.$$

il viendra

$$\frac{dV_2}{dr} = \Sigma n X_n, \qquad \frac{dV'_2}{dr} = -\Sigma(n+1)X_n,$$

d'où

$$4\pi\sigma h = \Sigma(2n+1)X_n = 2\frac{dV_2}{dr} + V_2.$$

L'équation d'équilibre devient donc

$$\frac{4}{3}\pi\rho - \frac{4}{3}\pi\rho h + V_2 = C$$

ou

$$V_2\left(1 - \frac{\rho}{3\sigma}\right) - \frac{2\rho}{3\sigma}\frac{dV_2}{dr} = C - \frac{4}{3}\pi\rho - \varphi.$$

Cette équation devra être satisfaite à la surface des mers; à la surface des continents, on devra avoir $h = 0$, d'où

$$2\frac{dV_2}{dr} + V_2 = 0.$$

Enfin, à l'intérieur de la sphère, on aura

$$\Delta V_2 = 0.$$

Nous pouvons simplifier un peu ces notations; supprimons d'abord l'indice 2 devenu inutile et écrivons V au lieu de V_2. Posons ensuite

$$\xi_0 = \frac{3\sigma}{\rho}, \qquad \varphi = \frac{3\sigma}{\rho}\Phi, \qquad \left(C - \frac{4}{3}\pi\rho\right)\frac{3\sigma}{\rho} = -k.$$

On devra avoir à la surface des mers

$$2\frac{dV}{dr} + V = \xi_0 V + \Phi + k$$

et à la surface des continents

$$2\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

Pour réunir ces deux équations en une seule, j'introduirai un coef-

ficient ε qui sera égal à 1 sur la surface des mers et à 0 sur celle des continents et j'écrirai

$$(1)\qquad 2\frac{dV}{dr} + V = \xi_0 \varepsilon V + \varepsilon(\Phi + k).$$

Le problème consiste alors à trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation (1) à la surface de la sphère et à

$$\Delta V = 0$$

à l'intérieur de la sphère.

Pour cela remplaçons l'équation (1) par

$$(1\ bis)\qquad 2\frac{dV}{dr} + V = \xi \varepsilon V + \varepsilon(\Phi + h),$$

où ξ est une indéterminée et développons V suivant les puissances de ξ. Soit

$$V = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 - \ldots.$$

Il viendra

$$2\frac{dv_0}{dr} + v_0 = \varepsilon(\Phi + k),$$

$$2\frac{dv_1}{dr} + v_1 = \varepsilon v_0,$$

$$2\frac{dv_2}{dr} + v_2 = \varepsilon v_1,$$

et, en général,

$$(2)\qquad 2\frac{dv_n}{dr} + v_n = \varepsilon v_{n-1}$$

à la surface de la sphère et

$$(3)\qquad \Delta v_n = 0$$

à l'intérieur.

Le théorème de Green nous donne

$$\int \left(v_n \frac{dv_m}{dr} - v_m \frac{dv_n}{dr} \right) d\omega = 0.$$

ou, en tenant compte de (2),

$$(4) \qquad \int (v_n v_{m-1} - v_m v_{n-1})\,\varepsilon\, d\omega = 0.$$

Les intégrations doivent être étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface de la sphère.

Posons

$$\int v_m v_n\,\varepsilon\, d\omega = V_{m,n}.$$

L'équation (4) montre que

$$V_{m,n-1} = V_{m-1,n},$$

et comme, d'ailleurs,

$$V_{m,n} = V_{n,m},$$

on conclut que

$$V_{m,n} = V_{0,m+n},$$

ce qui me permettra d'écrire avec un seul indice

$$V_{m,n} = V_{m+n}.$$

Je dis que V_n est essentiellement positif; en effet, si $n = 2p$, on a

$$V_n = \int v_p^2\,\varepsilon\, d\omega > 0,$$

et si $n = 2p - 1$, on a

$$V_n = \int v_p v_{p-1}\,\varepsilon\, d\omega = \int v_p \left(2\frac{dv_p}{dr} + v_p\right) d\omega = \int 2 v_p \frac{dv_p}{dr}\, d\omega + \int v_p^2\, d\omega,$$

ou, en vertu du théorème de Green,

$$V_n = 2\int \sum \left(\frac{dv_p}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_p^2\, d\omega > 0.$$

La première intégrale doit être étendue à tous les éléments $d\tau$ du

volume de la sphère et $\sum\left(\frac{dv_p}{dx}\right)^2$ est la somme des carrés des trois dérivées partielles de v_p.

Si l'on change φ en $\varphi + \lambda v_0$, v_n se change en $v_n + \lambda v_{n+1}$; V_{2n} et V_{2n+1} se changent en

$$\int (v_n + \lambda v_{n+1})^2 \varepsilon\, d\omega = V_{2n} + 2\lambda V_{2n+1} + \lambda^2 V_{2n+2}$$

et

$$\int (v_n + \lambda v_{n+1})(v_{n-1} + \lambda v_n) \varepsilon\, d\omega = V_{2n-1} + 2\lambda V_{2n} + \lambda^2 V_{2n+1}.$$

Ces expressions, quel que soit λ, doivent être positives; c'est-à-dire que les équations en λ

$$V_{2n} + 2\lambda V_{2n+1} + \lambda^2 V_{2n+2} = 0, \qquad V_{2n-1} + 2\lambda V_{2n} + \lambda^2 V_{2n+1} = 0$$

doivent avoir leurs racines imaginaires. On a donc

$$V_{2n+1}^2 < V_{2n} V_{2n+2}, \qquad V_{2n}^2 < V_{2n-1} V_{2n+1},$$

d'où

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} < \frac{V_{2n+1}}{V_{2n}} < \frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}}.$$

Le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ va donc en croissant avec n.

Or

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} = \frac{\int v_n^2 \varepsilon\, d\omega}{2\int \sum\left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_n^2 d\omega} < \frac{\int v_n^2\, d\omega}{2\int \sum\left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_n^2 d\omega}.$$

Si v_n est développé en série de fonctions sphériques sous la forme

$$v_n = \Sigma X_p,$$

nous aurons

$$\frac{dv_n}{dr} = \Sigma p X_p.$$

Si nous posons

$$\int X_p^2 d\omega = A_p^2,$$

il viendra

$$\int v_n^2\, d\omega = \Sigma \mathrm{A}_p^2$$

et

$$\int \sum \left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau = \int \frac{dv_n}{dr} v_n\, d\omega = \Sigma p \mathrm{A}_p^2,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{V}_{2n}}{\mathrm{V}_{2n-1}} = \frac{\Sigma \mathrm{A}_p^2}{\Sigma (2p+1) \mathrm{A}_p^2} < 1, \qquad \frac{\mathrm{V}_{n+1}}{\mathrm{V}_n} < 1.$$

Soit

$$\Phi + k = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_q \varphi_q,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ sont q fonctions données et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont des indéterminées. Les fonctions V et v_n seront des fonctions linéaires et homogènes des α, et nous pourrons poser

$$v_n = \alpha_1 v_n^{(1)} + \alpha_2 v_n^{(2)} + \ldots + \alpha_q v_n^{(q)}.$$

Le rapport

$$\frac{\mathrm{V}_{2n}}{\mathrm{V}_{2n-1}}$$

dépend aussi des α.

Or, si $q = \nu^2$, je puis, quels que soient les fonctions φ_i, choisir les indéterminées α de telle façon que le développement de v_n en série de fonctions sphériques, commence par une fonction d'ordre $\nu - 1$.

On aura alors

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{V}_{2n}}{\mathrm{V}_{2n-1}} < \frac{1}{2\nu - 1}.$$

Considérons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $q - 1$ dimensions. On pourra trouver dans cet espace une région R_n telle qu'à l'intérieur de cette région l'inégalité (5) soit vérifiée.

On pourra également trouver une région R_{n+1} telle que dans cette région on ait

$$\frac{\mathrm{V}_{2n+2}}{\mathrm{V}_{2n+1}} < \frac{1}{2\nu - 1}.$$

Cette région sera tout entière contenue dans R_n, puisque

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} < \frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}}.$$

On peut en conclure que, quand n croît indéfiniment, R_n tend à se réduire à une région limite que j'appelle R, qui peut se réduire à un seul point, mais qui contient au moins un point.

Le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ allant en croissant et étant plus petit que 1 tend vers une limite qui est au plus égale à 1; mais d'après ce qui précède, si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R, cette limite sera plus petite que $\frac{1}{2\nu-1}$.

On peut donc trouver un nombre A tel que l'on ait

$$V_n < A(2\nu - 1)^{-n},$$

pourvu que le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ soit dans la région R.

Cela posé, il est aisé d'intégrer l'équation (2). Soient $d\omega$ et $d\omega'$ deux éléments de la surface de la sphère; D la distance de ces deux éléments; soient ε' et v'_{n-1} les valeurs des fonctions ε et v_{n-1} au centre de gravité de l'élément $d\omega'$; on aura

$$(6) \qquad v_n = \int \frac{\varepsilon' v'_{n-1}\, d\omega'}{4\pi D}.$$

Je me propose de trouver la limite supérieure de $|v_n|$ que j'appelle g_n.

Pour cela, je divise la surface de la sphère en deux régions, que j'appelle R″ et R‴. Ces deux régions seront séparées l'une de l'autre par un petit cercle qui sera l'intersection de la sphère terrestre avec une autre sphère ayant pour centre l'élément $d\omega$ et pour rayon μ. La région R″ sera celle des deux régions qui contiendra l'élément $d\omega$. Nous poserons

$$v_n = v''_n + v'''_n.$$

v''_n sera défini comme v_n par l'intégrale (6); seulement cette intégrale,

au lieu d'être étendue à la sphère tout entière, sera étendue à la région R''; de même, v'''_n sera l'intégrale (6) étendue à R'''.

Cela posé, nous aurons

$$(v'''_n)^2 = \left[\int \frac{\varepsilon'^2 v'_{n-1}}{4\pi D} d\omega'\right]^2 < \int \varepsilon'^2 v'^2_{n-1} d\omega' \int \frac{d\omega'}{16\pi^2 D^2}.$$

Les intégrales doivent être étendues à R'''. La première est plus petite que

$$\int \varepsilon'^2 v'^2_{n-1} d\omega'$$

étendue à la sphère tout entière; mais cette dernière est égale à

$$\int \varepsilon' v'^2_{n-1} d\omega' = V_{2n-2};$$

car

$$\varepsilon' = 0 \quad \text{ou } 1 \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon' = \varepsilon'^2.$$

D'autre part,

$$\int \frac{d\omega'}{16\pi^2 D^2} < \int \frac{d\omega'}{16\pi^2 \mu^2} < \frac{1}{4\pi\mu^2};$$

car dans R''' on a $D > \mu$.

Il vient ainsi

$$|v'''_n| < \frac{\sqrt{V_{2n-2}}}{2\mu\sqrt{\pi}} < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{A}{\pi}}(2\nu - 1)^{-(n-1)}$$

(si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R).

On a ensuite

$$|v''_n| = \left|\int \frac{\varepsilon' v'_{n-1}}{4\pi D} d\omega'\right| < \int \frac{g_{n-1} d\omega'}{4\pi D}.$$

Les intégrales doivent être étendues à R''; la seconde est aisée à calculer; elle est égale à

$$\frac{\mu g_{n-1}}{2}.$$

Il vient donc

$$|v''_n| < \frac{\mu g_{n-1}}{2},$$

d'où

$$|v_n| < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\Lambda}{\pi}}(2\nu - 1)^{-(n-1)} + \frac{\mu}{2} g_{n-1}$$

et

$$g_n < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{\Lambda}{\pi}}(2\nu - 1)^{-(n-1)} + \frac{\mu}{2} g_{n-1}.$$

La quantité μ est arbitraire; mais il nous suffit de lui donner une valeur quelconque; l'inégalité précédente peut s'écrire

$$g_n < \frac{a}{(2\nu - 1)^n} + b g_{n-1},$$

a et b étant des constantes.

Si λ est la plus petite des deux quantités

$$b = \frac{\mu}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\nu - 1},$$

cela s'écrit

$$g_n < a\lambda^n + \lambda g_{n-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&g_1 < (a + g_0)\lambda,\\
&g_2 < a\lambda^2 + \lambda g_1 < \lambda^2(2a + g_0),\\
&g_3 < a\lambda^3 + \lambda g_2 < \lambda^3(3a + g_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&g_n < \lambda^n(na + g_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Comme μ est arbitraire, je puis prendre

$$\mu < \frac{2}{2\nu - 1},$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2\nu - 1}.$$

Il résulte de là que la série

$$v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \dots$$

est (pourvu que le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ soit dans la région R) absolument et uniformément convergente toutes les fois que

$$|\xi| < 2\nu - 1.$$

Soit maintenant

$$\varphi^* = \alpha_1(\Phi + k) + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \ldots + \alpha_q v_{q-2} \qquad (q = \nu^2),$$

$$v_n^* = \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1} + \ldots + \alpha_q v_{n+q-1},$$

(7) $$V^* = v_0^* + \xi v_1^* + \xi^2 v_2^* + \ldots,$$

d'où

$$2\frac{dV^*}{dr} + V^* = \xi\varepsilon V^* + \varepsilon\varphi^*.$$

Si alors V^* est regardée comme une fonction de ξ définie par la série (7) et si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R, cette fonction de ξ sera holomorphe dans le cercle de rayon $2\nu + 1$.

Mais on a

$$V^* = \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{V - v_0}{\xi} + \alpha_3 \frac{V - v_0 - v_1\xi}{\xi^2} + \ldots$$
$$+ \alpha_q \frac{V - v_0 - v_1\xi - \ldots - v_{q-2}\xi^{q-2}}{\xi^{q-1}},$$

d'où l'on peut conclure que V est une fonction rationnelle de V^* et de ξ et que, par conséquent, à l'intérieur du cercle de rayon $2\nu + 1$, V est une fonction méromorphe de ξ dont les pôles sont les racines de l'équation

$$\alpha_1\xi^{q-1} + \alpha_2\xi^{q-2} + \alpha_3\xi^{q-3} + \ldots + \alpha_{q-1}\xi + \alpha_q = 0.$$

Comme ν est arbitraire, il résulte de là que V est méromorphe dans tout le plan et que ses pôles sont fixes, je veux dire indépendants du centre de gravité de l'élément $d\omega$.

Je vais maintenant montrer que les pôles sont simples et étudier les résidus; je veux démontrer que, si ξ_i est un pôle et U_i le résidu correspondant, on a à la surface de la sphère

(8) $$2\frac{dU_i}{dr} + U_i = \varepsilon\xi_i U_i.$$

et à l'intérieur

$$\Delta U_i = 0.$$

Il me suffirait pour cela de répéter le raisonnement que j'ai fait dans mon Mémoire sur les équations de la Physique mathématique qui a été inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*; il est inutile de le reproduire ici.

Le théorème de Green nous donne

$$\int \left(V \frac{dU_i}{dr} - U_i \frac{dV}{dr} \right) d\omega = 0,$$

ou en vertu des équations (1 *bis*) et (8)

$$\int \varepsilon \, d\omega \left[V \xi_i U_i - U_i (\xi V + \Phi + k) \right] = 0,$$

ou

$$(\xi_i - \xi) \int \varepsilon V U_i \, d\omega = \int \varepsilon U_i (\Phi + k) \, d\omega.$$

Soit alors

$$V = \frac{U_i}{\xi - \xi_i} + V',$$

V' ne deviendra pas infini pour $\xi = \xi_i$; il viendra donc

$$-\int \varepsilon U_i^2 \, d\omega + \int (\xi_i - \xi) V' U_i \varepsilon \, d\omega = \int \varepsilon U_i (\Phi + k) \, d\omega,$$

ou pour $\xi = \xi_i$

$$(9) \qquad -\int \varepsilon U_i^2 \, d\omega = \int \varepsilon U_i (\Phi + k) \, d\omega.$$

2. — Fonctions fondamentales.

Il n'y aura, en général, qu'une seule fonction U_i qui satisfasse à l'équation (8) ou plutôt toutes les fonctions qui satisferont à cette équation ne différeront que par un facteur constant.

Soit u_i une de ces fonctions; je la choisirai de telle façon que

$$\int \varepsilon u_i^2 \, d\omega = 1,$$

et la solution la plus générale de l'équation (8) sera

$$U_i = A_i u_i,$$

A_i étant un facteur constant; je dirai que u_i est une fonction *fondamentale*.

Il est aisé de voir que, si u_i et u_k sont deux fonctions fondamentales correspondant à deux nombres différents ξ_i et ξ_k, on aura

$$(10) \qquad \int \varepsilon u_i u_k \, d\omega = 0.$$

Mais il peut arriver aussi que plusieurs fonctions linéairement indépendantes satisfassent à une même équation (8). Il n'y en aura en tout cas qu'un nombre fini (au plus ν^2, si $|\xi_i| < 2\nu - 1$).

Toutes les fonctions U_i qui satisfont à l'équation (8) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q+1$ fonctions linéairement indépendantes que j'appellerai *fondamentales* et que je désignerai par

$$u_i, \quad u_{i+1}, \quad \ldots, \quad u_{i+q}.$$

Je pourrai choisir ces fonctions fondamentales de telle façon que

$$\int \varepsilon u_i^2 \, d\omega = 1, \qquad \int \varepsilon u_i u_k \, d\omega = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Nous aurons alors

$$U_i = A_i u_i + A_{i+1} u_{i+1} + \ldots + A_{i+q} u_{i+q},$$

les A étant des facteurs constants.

Voici quelles règles je suivrai pour le numérotage des fonctions u_i et des nombres ξ_i.

J'observe d'abord que les nombres ξ_i sont essentiellement positifs et plus grands que 1.

Je les rangerai par ordre de grandeur croissante. Mais il pourra arriver, comme je viens de le dire, qu'un même nombre ξ_i corresponde à $q+1$ fonctions fondamentales

$$u_i, \quad u_{i+1}, \quad \ldots, \quad u_{i+q}.$$

Dans ce cas, je désignerai indifféremment le nombre ξ_i par les lettres

$$\xi_i, \quad \xi_{i+1}, \quad \ldots, \quad \xi_{i+q},$$

et le nombre suivant sera ξ_{i+q+1}.

Dans ces conditions le nombre ξ_k correspondra toujours à la fonction u_k de même indice, et au lieu d'écrire le terme infini de V correspondant au pôle $\xi = \xi_i$ sous la forme

$$\frac{U_i}{\xi - \xi_i},$$

je pourrai l'écrire

$$\frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i} + \frac{A_{i+1} u_{i+1}}{\xi - \xi_{i+1}} + \ldots + \frac{A_{i+q} u_{i+q}}{\xi - \xi_{i+q}}.$$

Les coefficients A_i se calculent aisément à l'aide de la formule (9); on trouve

$$A_i = -\int \varepsilon\, u_i(\Phi + k)\, d\omega.$$

On aura évidemment l'inégalité

$$(11) \qquad \xi_{\nu^2} > 2\nu - 1.$$

Si une fonction quelconque F est développable en série de fonctions fondamentales sous la forme

$$F = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \ldots.$$

on aura, en vertu des relations (10),

$$B_i = \int \varepsilon u_i F \, d\omega.$$

L'analogie avec les fonctions sphériques est donc évidente.

D'ailleurs, il y a un cas où nos fonctions fondamentales se réduisent aux fonctions sphériques elles-mêmes : c'est le cas de $\varepsilon =$; c'est-à-dire celui où les mers recouvrent toute la surface du Globe.

De l'égalité (6) nous avons déduit plus haut l'inégalité suivante, où g_n représente le maximum de $|c_n|$:

$$(12) \qquad g_n < \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi}} \sqrt{V_{2n-2}} + \frac{\mu}{2} g_{n-1}.$$

Nous avons de même

$$2 \frac{du_i}{dr} + u_i = \varepsilon \xi_i u_i,$$

d'où

$$u_i = \xi_i \int \frac{\varepsilon' u_i' \, d\omega'}{4\pi D}.$$

Cette relation, où les notations ont le même sens que dans la relation (6), est analogue à l'égalité (6) ; seulement c_n et c_{n-1} sont remplacés par u_i et $\xi_i u_i$.

Nous pourrons donc récrire l'inégalité (12) en y remplaçant g_n par le maximum de $|u_i|$, que j'appelle G_i, g_{n-1} par le maximum de $|\xi_i u_i|$, qui est $\xi_i G_i$, et

$$V_{2n-2} = \int \varepsilon c_{n-1}^2 \, d\omega,$$

par

$$\int \varepsilon \xi_i^2 u_i^2 \, d\omega = \xi_i^2.$$

L'inégalité devient ainsi

$$G_i < \frac{\xi_i}{2\mu\sqrt{\pi}} + \frac{\mu}{2} \xi_i G_i.$$

Comme μ est arbitraire, je puis le choisir de façon à rendre le second membre minimum; je prendrai donc

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{G_i}\,\pi^{\frac{1}{4}}},$$

d'où

$$G_i < \xi_i \frac{\sqrt{G_i}}{\sqrt[4]{\pi}},$$

d'où enfin

$$G_i < \frac{\xi_i^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Nous avons ensuite, par l'inégalité de Schwarz,

$$A_i^2 = \left[\int \varepsilon\, u_i(\Phi + k)\, d\omega\right]^2 < \int \varepsilon^2 u_i^2\, d\omega \int (\Phi + k)^2\, d\omega.$$

La première des intégrales du dernier membre est égale à 1 par la relation (10); la seconde peut être regardée comme donnée; je l'appelle Q^2 et j'en déduis

$$|A_i| < Q.$$

Envisageons la série

$$\sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i} \left(\frac{\xi}{\xi_i}\right)^p.$$

Cette série sera absolument convergente si la suivante l'est

$$\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^{p+1}}.$$

Or, le terme général de cette série est plus petit que

$$\frac{Q}{\sqrt{\pi}} \xi_i^{(p-1)}.$$

Or

$$\xi_{\nu^2} > 2\nu - 1.$$

Donc

$$\xi_i > C' \sqrt{i},$$

C' étant une constante. Le terme général est donc plus petit qu'un facteur constant multiplié par

$$\xi_i^{-\frac{p-1}{2}}.$$

La condition de convergence est donc que

$$p > 3.$$

Considérons alors la série

$$W = \sum \frac{A_i u_i \xi^5}{(\xi - \xi_i)\xi_i^5};$$

elle converge uniformément et représente une fonction méromorphe W qui a mêmes pôles et mêmes résidus que V : on a donc

$$V = W + E(\xi),$$

E désignant une fonction entière de ξ.

D'autre part, on a

$$2\frac{dW}{dr} + W = \varepsilon \sum \frac{A_i u_i \xi^5}{(\xi - \xi_i)\xi_i^5},$$

la série du second membre convergeant uniformément, d'où

$$2\frac{dW}{dr} + W = \varepsilon\xi W - \varepsilon\xi^5 \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^5};$$

la série du dernier terme du second membre est encore absolument et uniformément convergente. Comme on a, d'autre part,

$$2\frac{dV}{dr} + V = \varepsilon\xi V - \varepsilon(\Phi + k),$$

on en déduira

$$2\frac{dE}{dr} + E = \varepsilon\xi E + \varepsilon(\Phi - k) + \varepsilon\xi^5 \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^5}.$$

Soit alors

(13) $$E = e_0 + e_1\xi + e_2\xi^2 + \ldots.$$

on aura

$$\frac{2\,de_n}{dr} + e_n = \varepsilon e_{n-1},$$

sauf pour $n = 0$ et $n = 5$, pour lesquels nous devrons écrire les équations suivantes :

$$\frac{2\,de_0}{dr} + e_0 = \varepsilon(\Phi + k); \qquad \frac{2\,de_5}{dr} + e_5 = \varepsilon e_4 + \varepsilon \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^5}.$$

Les équations qui définissent les e_n sont donc à partir de $n = 6$ tout à fait de même forme que les équations qui définissent les v_n.

Si donc nous désignons par $E_{m,n}$ les intégrales analogues aux $V_{m,n}$, nous voyons que

$$E_{m,n} = E_{m+n},$$

$$E_n > 0, \qquad \frac{E_{n+1}}{E_n} < \frac{E_{n+2}}{E_{n+1}}.$$

Ces inégalités sont vraies pour $n > 10$; donc à partir de $n = 10$, le rapport $\frac{E_{n+1}}{E_n}$ qui est positif va en croissant; et alors à moins que ce rapport ne soit constamment nul, il tendra vers une limite différente de 0 qui sera l'inverse du rayon de convergence de la série (13).

Mais la fonction E doit être entière : il faut donc que ce rapport soit constamment nul et que l'on ait

$$E_{n+1} = 0,$$

pour $n > 10$; on a donc

$$\int \varepsilon e_n^2\, d\omega = 0,$$

et, par conséquent

$$e_n = 0,$$

pour $n \geq 6$.

La fonction E est donc un polynome du 5[e] degré.

Comme W est divisible par ξ^5, on aura évidemment

$$E = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + e_3 \xi^3 + e_4 \xi^4 + e_5 \xi^5.$$

On a, d'ailleurs, en comparant les développements de E, V et W,

$$v_5 = e_5 - \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^6}, \qquad v_6 = - \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^7}.$$

L'équation

$$2 \frac{dv_6}{dr} + v_6 = \varepsilon v_5$$

donne alors

$$\varepsilon v_5 = - \varepsilon \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^6},$$

d'où

$$\varepsilon e_5 = 0.$$

Si maintenant je suppose que l'on puisse trouver cinq fonctions w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 telles que

$$2 \frac{dw_2}{dr} + w_2 = \varepsilon w_1, \qquad 2 \frac{dw_3}{dr} + w_3 = \varepsilon w_2, \qquad 2 \frac{dw_4}{dr} + w_4 = \varepsilon w_3,$$

$$2 \frac{dw_5}{dr} + w_5 = \varepsilon w_4, \qquad 2 \frac{d\Phi + k}{dr} + \Phi + k = \varepsilon w_5,$$

la série

$$(14) \qquad \sum A_i u_i$$

convergera et l'on aura tout simplement

$$(15) \qquad V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

C'est ce qui arrivera si la fonction $\Phi + k$ est continue ainsi que toutes ses dérivées et si elle s'annule ainsi que ses dérivées des cinq premiers ordres sur le bord des continents.

J'ajouterai que, selon toutes les analogies, la série (14) est probablement toujours convergente et la formule (15) toujours vraie.

3-4. — Application aux marées.

Supposons donc que la série (14) soit toujours convergente, ce qui donne

$$\Phi + k = -\sum A_i u_i,$$

$$V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

La fonction Φ est donnée; nous pourrons donc la développer sous la forme

$$\Phi = \sum B_i u_i.$$

et nous aurons de même

$$1 = \sum C_i u_i.$$

Une fois qu'on a admis la possibilité du développement, rien n'est plus facile, comme nous l'avons vu, que de calculer les coefficients B_i et C_i.

On a alors

$$A_i = -B_i - C_i k.$$

Il reste à calculer la constante k: nous le ferons en remarquant que le volume du liquide doit demeurer constant.

Or la variation de ce volume est proportionnelle à

$$\int \left(2\frac{dV}{dr} + V\right) d\omega.$$

Je fais remarquer que sur les continents

$$2\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

On doit donc avoir

$$\int \left(2\frac{dV}{dr} + V\right) d\omega = 0.$$

Or

$$2\frac{dV}{dr} + V = \varepsilon \sum \frac{A_i u_i \xi_i}{\xi - \xi_i}.$$

Il vient ainsi

$$(16) \qquad k\sum\frac{C_i\xi_i}{\xi-\xi_i}\int\varepsilon u_i\,d\omega+\sum\frac{B_i\xi_i}{\xi-\xi_i}\int\varepsilon u_i\,d=\omega o,$$

ce qui déterminerait la constante k.

Il faut faire finalement $\xi=\xi_0$.

Si l'on suppose que les mers recouvrent tout le globe, les fonctions fondamentales u_i se réduisent aux fonctions sphériques X_i; les nombres ξ_i sont égaux à $2\nu-1$; ν étant la racine carrée de i à une unité près *par excès*.

On a alors

$$C_i=\int\varepsilon u_i\,d\omega=\int X_i\,d\omega,$$

ce qui montre que tous les C_i sont nuls, sauf C_1.

De plus, dans l'équation (16), tous les termes $\int\varepsilon u_i\,d\omega$ sont nuls, sauf le premier; il reste donc

$$kC_1+B_1=0.$$

Dans le cas particulier des marées Φ a une forme particulière; c'est une fonction sphérique du deuxième ordre; je puis toujours supposer que

$$\Phi=B_5X_5,$$

puisque le choix des cinq fonctions fondamentales

$$u_i=X_i \qquad (i=5,6,7,8,9),$$

qui doivent être des fonctions sphériques du deuxième ordre, reste arbitraire dans une certaine mesure.

On a, d'ailleurs,

$$B_1=0,$$

d'où

$$k=0, \qquad A_5=-B_5,$$

$$V=\frac{-\Phi}{\xi-\xi_5}=\frac{\Phi}{5-\xi}.$$

Si l'on fait d'abord $\xi = 0$, c'est-à-dire si l'on néglige l'attraction du liquide sur lui-même, il vient

$$V = \frac{\Phi}{5}.$$

Si l'on fait ensuite $\xi = \xi_0$, il vient

$$V = \frac{\Phi}{5 - \xi_0} = \frac{\Phi}{5}\,\frac{5}{5 - \xi_0}.$$

Comme on a à peu près $\xi_0 = \frac{3}{5}$, cela fait

$$V = \frac{\Phi}{5}\,\frac{25}{22}.$$

On voit que l'erreur commise en négligeant l'attraction du liquide sur lui-même est assez faible.

Supposons maintenant que la mer ne recouvre plus le globe tout entier, mais négligeons l'attraction du liquide sur lui-même, il viendra

$$V = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i},$$

d'où, à la surface des mers,

$$2\frac{dV}{dr} + V = \Phi + k.$$

La constante k doit être déterminée par la condition que la variation du volume total soit nulle.

Lord Kelvin et M. Tait, dans leur *Traité de Philosophie naturelle*, ont appliqué cette méthode aux oscillations lentes dont la période est de six mois ou de quinze jours; ils ont comparé le résultat obtenu avec l'observation; cette comparaison n'est pas satisfaisante si l'on tient compte de ce fait que la marée apparente devrait être diminuée par la déformation éprouvée par la croûte terrestre elle-même, qui n'est pas absolument rigide. Le résultat ne pourrait s'expliquer qu'en admettant, non seulement, que le globe terrestre est un solide plein, mais qu'il est beaucoup plus rigide que l'acier.

Sans doute, la méthode employée par les deux illustres savants anglais consiste à négliger l'attraction du liquide sur lui-même. Nous venons de voir que, dans le cas où les mers recouvrent le globe entier, l'erreur relative qui est commise est de $\frac{3}{22}$. Les auteurs concluent qu'elle doit être aussi très faible dans le cas de la nature.

Je ne m'inscris pas en faux contre cette conclusion, elle est probablement exacte; je voudrais seulement montrer qu'elle n'est pas aussi évidente qu'on pourrait d'abord le croire.

Nous avons

$$V = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i - \xi_0},$$

au lieu de

$$V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i}.$$

L'erreur relative commise *sur un terme* de la série est donc

$$\frac{\xi_0}{\xi_i - \xi_0}.$$

Comme ξ_i est plus grand que $2\nu - 1$, s'il y a des continents, et égal à $2\nu - 1$ s'il n'y en a pas, cette erreur est plus petite dans le premier cas que dans le second.

Mais, d'autre part, les termes en

$$A_1 u_1, \quad A_2 u_2, \quad A_3 u_3, \quad A_4 u_4,$$

qui disparaissent quand il n'y a pas de continents, ne sont pas nuls quand il y a des continents.

D'un autre côté, on peut concevoir que les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 soient voisines de ce qu'elles seraient si les continents n'existaient pas, c'est-à-dire de 1 et de 3.

Les erreurs relatives commises sur ces quatre termes seraient alors voisines de $\frac{3}{2}$ ou de $\frac{1}{4}$.

On peut donc concevoir que, pour certaines formes particulières des continents, l'erreur relative commise sur V soit notablement plus grande que $\frac{3}{22}$.

Il est probable qu'il n'en est pas ainsi, mais pour le vérifier il fau-

drait faire le calcul complet, et à cause de la forme capricieuse des continents ce calcul, même réduit à une approximation grossière, serait absolument inextricable.

5. — Généralités sur les oscillations.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des oscillations à longue période, ce qui est une simple question de Statique; les oscillations à courte période doivent, au contraire, être traitées en tenant compte de l'inertie, c'est-à-dire comme une question de Dynamique.

Considérons d'abord un système dont la position est définie par n coordonnées quelconques $q_1, q_2, \ldots, q_n$; soient $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ les vitesses, c'est-à-dire les dérivées de ces coordonnées.

Soient T l'énergie cinétique, U l'énergie potentielle due aux forces intérieures. Soit

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_n\,\delta q_n$$

le travail virtuel des forces extérieures correspondant à une variation virtuelle δq_i de la coordonnée q_i.

Les équations de Lagrange nous donneront

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a} - \frac{dT}{dq_a} + \frac{dU}{dq_a} = Q_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Les Q_a sont des fonctions données du temps.

Je suppose que le système ne s'écarte jamais beaucoup d'un certain état d'équilibre stable. Cet état d'équilibre stable devra correspondre à un minimum de la fonction U. Je suppose, par exemple, qu'il corresponde aux valeurs

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0, \qquad U = 0.$$

Je suppose que U s'annule avec les q, ce qui est permis, puisque U n'est déterminé qu'à une constante près. Alors U est développable suivant les puissances des q_a; le développement commence par des termes du second degré. Comme les q_a sont très petits, je m'arrêterai

à ces termes et U sera un polynome homogène du second degré par rapport aux q_a.

Avec cette même approximation, T sera un polynome homogène du second degré par rapport aux q'_a, indépendant des q_a et nos équations deviendront

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a}+\frac{dU}{dq_a}=Q_a. \tag{2}$$

Les premiers membres de ces équations sont des polynomes linéaires et à coefficients constants par rapport aux q et aux q''; les seconds membres sont des fonctions connues de t. Nous avons donc des équations différentielles linéaires à second membre et il faut d'abord intégrer les équations sans second membre,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a}+\frac{dU}{dq_a}=0. \tag{3}$$

Il faut, pour faire l'intégration, poser

$$q_a=\alpha_a\cos\lambda t, \qquad q'_a=-\alpha_a\lambda\sin\lambda t, \tag{4}$$

les α_a et λ étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Soient T_0 et U_0 ce que deviennent T et U quand on y remplace les q_a et les q'_a par les α_a. Quand on y remplacera les q_a et les q'_a par leurs valeurs (4), on trouvera

$$U=U_0\cos^2\lambda t, \qquad T=T_0\lambda^2\sin^2\lambda t; \qquad \frac{dU}{dq_a}=\frac{dU_0}{d\alpha_a}\cos\lambda t$$
$$\frac{dT}{dq'_a}=-\lambda\sin\lambda t\frac{dT_0}{d\alpha_a}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a}=-\lambda^2\cos\lambda t\frac{dT_0}{d\alpha_a},$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$\lambda^2\frac{dT_0}{d\alpha_a}=\frac{dU_0}{d\alpha_a}. \tag{5}$$

L'ensemble des équations (5) signifie que $\lambda^2 T_0-U_0$, qui est une forme quadratique par rapport aux α_a, a son discriminant nul.

L'équation qui exprime que ce discriminant est nul est une équation algébrique de degré n en λ^2 ; comme T et U sont deux formes quadratiques définies positives, cette équation en λ^2 a toutes ses racines réelles et positives.

Le théorème des fonctions homogènes, comparé aux équations (5), nous donne évidemment

$$\lambda^2 T_0 = U_0,$$

et les équations (5) deviennent

$$\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{d\alpha_a} = \frac{1}{U_0}\frac{dU_0}{d\alpha_a}$$

ou

$$\frac{d}{d\alpha_a}\left(\frac{T_0}{U_0}\right) = 0,$$

de sorte que la résolution des équations (5) revient à la recherche des maxima et des minima, ou des *maxima minimorum* du rapport

$$\frac{T_0}{U_0}.$$

Je désignerai par

$$\pm\lambda_1, \quad \pm\lambda_2, \quad \ldots, \quad \pm\lambda_n$$

les n racines de l'équation en λ^2 ; les lettres α_a^i seront les valeurs des α_a qui satisfont aux équations (5) en y faisant $\lambda = \lambda_i$.

D'après la théorie des formes quadratiques, les deux formes T_0 et U_0 peuvent toujours se décomposer comme il suit

$$T_0 = P_1^2 + \ldots + P_n^2,$$
$$U_0 = \mu_1 P_1^2 + \ldots + \mu_n P_n^2,$$

les P étant des polynomes linéaires et homogènes par rapport aux α_a et les μ étant des constantes.

On voit tout de suite alors que

$$\mu_i = \lambda_i^2$$

et que les valeurs des $\alpha_a^{(i)}$ satisferont aux équations suivantes équivalentes aux équations (5) et qui sont au nombre de $n-1$

$$P_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, i-1 \\ k = i+1, i+2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Comme ces équations ne déterminent les α_a^i qu'à un facteur constant près, nous disposerons de ce facteur constant de telle sorte que

$$P_i(\alpha_a^{(i)}) = 1.$$

On a alors

$$2\,P_i(\alpha_a) = \sum \alpha_a \frac{dT_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}} = \frac{1}{\lambda_i^2} \sum \alpha_a \frac{dU_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}},$$

ce qui entraîne les équations

$$(6) \qquad \sum \alpha_a^{(i)} \frac{dT_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}} = 2; \qquad \sum \alpha_a^{(k)} \frac{dT_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}} = 0 \qquad (i \lessgtr k).$$

Voici maintenant comment on pourra conduire le raisonnement.

Le rapport $\frac{U_0}{T_0}$ ne peut s'annuler, il a donc un minimum λ_1^2 qui est atteint pour $\alpha_a = \alpha_a^{(1)}$; assujettissons ensuite les α_a à la condition

$$(7) \qquad \sum \alpha_a^{(1)} \frac{dT_0(\alpha_a)}{d\alpha_a} = 0;$$

il y aura encore un minimum (plus grand que le premier), que j'appelle λ_2^2 et qui sera atteint pour $\alpha_a = \alpha_a^{(2)}$.

J'assujettis ensuite les α_a à la condition (7) et de plus à la condition

$$(7\ bis) \qquad \sum \alpha_a^{(2)} \frac{dT_0(\alpha_a)}{d\alpha_a} = 0,$$

et j'obtiens un nouveau minimum λ_3^2, et ainsi de suite.

Toutes ces considérations permettent de définir les $\alpha_a^{(i)}$ et les λ_i et nous fournissent par conséquent la solution complète des équations

sans second membre : revenons maintenant aux équations à second membre (2).

Les Q_a sont des fonctions de t qui pourront toujours se mettre sous la forme d'intégrales de Fourier; mais il nous suffira de nous réduire pour ainsi dire à l'un des éléments de ces intégrales et à poser

$$Q_a = R_a \cos \lambda t,$$

les R_a étant des constantes données.

Nous pourrons alors résoudre les équations (2) en posant

$$q_a = \alpha_a \cos \lambda t;$$

c'est cette solution qui constituera ce qu'on peut appeler une oscillation simple *forcée*, tout à fait analogue aux ondes élémentaires dont la réunion constitue les marées; tandis que nous réserverons le nom d'oscillations simples *propres* aux solutions

$$q_a = \alpha_a^{(i)} \cos \lambda_i t$$

des équations (3).

Les équations (2) deviennent alors (en divisant par $\cos \lambda t$)

$$(8) \qquad -\lambda^2 \frac{dT_0}{d\alpha_a} + \frac{dV_0}{d\alpha_a} = R_a.$$

Multiplions les équations (8) par α_a^i et ajoutons, il viendra

$$(9) \qquad 2(\lambda_i^2 - \lambda^2) P_i(\alpha_a) = \Sigma R_a \alpha_a^i.$$

Les n équations (8) sont ainsi remplacées par les n équations (9).
Si l'on avait

$$R_a = k \frac{dT_0}{d\alpha_a^i} \quad \left[\text{j'écris } \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(i)}} \text{ pour } \frac{dT_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}}\right],$$

la solution serait immédiate et l'on aurait

$$\alpha_a = \frac{k \alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

On est donc conduit à chercher à déterminer les n coefficients

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

par les n équations

$$(10) \qquad R_a = k_1 \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(1)}} + k_2 \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(2)}} + \ldots + k_n \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(n)}}.$$

Pour cela, multiplions ces équations par $\alpha_a^{(i)}$ et ajoutons; il viendra, en vertu de (6),

$$\Sigma R_a \alpha_a^{(i)} = 2k_i.$$

Les coefficients k_i étant ainsi déterminés, on aura

$$(11) \qquad \alpha_a = \sum_i \frac{k_i \alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

On voit comment l'étude des oscillations forcées se ramène à celle des oscillations propres.

Dans les problèmes que nous aurons à traiter, la situation du système n'est plus définie par un nombre fini de paramètres, mais par une infinité; T et U ne s'expriment plus par des sommes de termes, mais par des intégrales définies.

Tout ce que nous avons dit subsiste d'ailleurs; la manière d'étudier les oscillations propres par la suite des minima successifs du rapport de T à U; celle de ramener les oscillations forcées aux oscillations propres; enfin les équations (6) où il faut remplacer les sommes par des intégrales et qui deviennent ainsi ces séries d'équations, analogues aux équations (10) du n° 2, et que l'on rencontre dans tous les problèmes de Physique mathématique.

La première idée de cette généralisation, qui est le fondement de tout ce qui va suivre, est due à lord Rayleigh.

Les équations (11) montrent que les α_a sont des fonctions rationnelles de λ^2; ces fonctions sont les analogues de la fonction V étudiée dans le n° 1 et qui est une fonction méromorphe de ξ.

Nous pouvons tirer de ces mêmes équations (11) α_a développé suivant les puissances de λ^2; il viendra

$$\alpha_a = \beta_a^{(0)} + \beta_1^{(1)} \lambda^2 + \beta_2^{(2)} \lambda^4 + \ldots$$

avec la condition

$$\beta_a^{(k)} = \sum \frac{k_i \alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^{2k+2}}.$$

Formons maintenant les expressions

$$(12) \qquad \sum_a \beta_a^{(m)} \frac{d\mathrm{T}_0}{d\beta_a^{(n)}}; \qquad \sum \beta_a^{(m)} \frac{d\mathrm{U}_0}{d\beta_a^{(n)}}$$

(je suppose, bien entendu, que dans T_0 et U_0 les α_a ont été remplacés par $\beta_a^{(n)}$).

Ces expressions sont analogues aux intégrales $\mathrm{V}_{m,n}$ considérées dans le n° **1**.

On trouve aisément

$$\sum_a \beta_a^{(m)} \frac{d\mathrm{T}_0}{d\beta_a^{(n)}} = \sum \frac{2k_i^2}{\lambda_i^{2m+2n+4}},$$

$$\sum_a \beta_a^{(m)} \frac{d\mathrm{U}_0}{d\beta_a^{(n)}} = \sum \frac{2k_i^2}{\lambda_i^{2m+2n+2}}.$$

Ces équations montrent que les expressions (12) ne changent pas quand on change m et n en $m+h$ et $n-h$.

Cette proposition est analogue à l'équation

$$\mathrm{V}_{m,n} = \mathrm{V}_{m+1,n-1}$$

démontrée dans le n° **1**.

6. — Oscillations propres des liquides.

Considérons un liquide enfermé dans un vase assez petit pour qu'à l'intérieur de ce vase la pesanteur puisse être regardée comme une force constante en grandeur et en direction. La surface libre du liquide en équilibre se réduira à un plan horizontal.

Nous supposerons que l'on peut négliger l'attraction mutuelle des diverses portions du liquide et les effets de la force centrifuge composée; et nous proposons d'étudier les petites oscillations de ce liquide lorsqu'il a été peu écarté de sa position d'équilibre, puisqu'il est abandonné à lui-même.

A l'origine du temps, le liquide est écarté de sa position d'équilibre, mais il est en repos; si la forme initiale de la surface libre, écartée de l'équilibre, est convenablement choisie, le mouvement du liquide sera périodique, et nous aurons ce qu'on appelle *une oscillation propre simple*.

Si cette forme initiale est quelconque, le mouvement du liquide résulte de la superposition d'une infinité d'oscillations simples. Dans tous les cas, d'après le théorème de Lagrange, comme nous partons du repos, il y aura une fonction des vitesses.

Considérons le cas d'une oscillation simple; comme le mouvement est périodique, cette fonction sera de la forme

$$\Phi = \varphi \sin \lambda t,$$

φ étant indépendant du temps. L'équation de continuité sera

$$\Delta \varphi = 0.$$

La pression p, si nous prenons la densité du liquide pour unité et l'axe des z dirigé de haut en bas, sera donnée par la formule

$$p = gz - \frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right].$$

Mais les mouvements étant très petits, nous pouvons négliger le carré de Φ et il reste

$$p = gz - \frac{d\Phi}{dt} = gz - \lambda\varphi \cos \lambda t.$$

La force vive du liquide est égale

$$\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right]d\tau = \frac{\sin^2 \lambda t}{2}\int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau.$$

L'intégration doit être étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du liquide.

Quant à l'énergie potentielle, elle est égale à

$$\frac{1}{2}\int g z^2 \, d\omega.$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre du liquide.

Cette surface libre, en négligeant des infiniment petits, peut être assimilée à un plan horizontal et nous prendrons ce plan pour plan des xy.

Une molécule qui se trouve à la surface libre était dans le plan des xy quand le liquide était en équilibre. La quantité z qui entre dans notre intégrale n'est donc autre chose que la projection sur l'axe des z du déplacement de cette molécule.

Or les projections du déplacement d'une molécule sur les trois axes sont évidemment égales à

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx},\quad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dy},\quad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

L'énergie potentielle est donc égale à

$$\frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega = \frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\,dy.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, le problème est ainsi ramené à rechercher les maxima et minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

à l'intégrale

$$B = \int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega.$$

La première intégrale est étendue aux éléments $d\tau$ du volume du liquide et ce volume est limité, d'une part, par la surface de la paroi du vase et, d'autre part, par la surface libre qui est une portion du plan des xy. La seconde intégrale est étendue à la surface libre.

La fonction φ est assujettie à deux conditions :

1° A l'intérieur du vase, on aura

$$\Delta\varphi = 0.$$

2° Sur la surface de la paroi, on aura

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On trouve

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \sum \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\delta\varphi}{dx}d\tau,$$

ou, en vertu du théorème de Green,

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \frac{d\varphi}{dn}\delta\varphi\,d\omega + \int \frac{d\varphi}{dn}\delta\varphi\,d\omega' - \int \Delta\varphi\,\delta\varphi\,d\tau.$$

La première intégrale est étendue à la surface libre, le long de laquelle on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

La seconde est étendue à la surface de la paroi ; elle est nulle.

La troisième est étendue au volume du vase ; elle est également nulle.

Il reste donc

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \frac{d\varphi}{dz}\delta\varphi\,d\omega.$$

On trouve, d'autre part,

$$\frac{1}{2}\delta B = \int \frac{d\varphi}{dz}\delta\frac{d\varphi}{dz}d\omega.$$

Mais le théorème de Green nous donne également

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \varphi\frac{d\delta\varphi}{dn}d\omega + \int \varphi\frac{d\delta\varphi}{dn}d\omega' - \int \varphi\,\delta\Delta\varphi\,d\tau.$$

Mais la fonction φ étant *assujettie* aux deux conditions $\Delta\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, on devra avoir :

Sur la surface de la paroi

$$\frac{d\delta\varphi}{dn} = 0.$$

Donc la seconde intégrale est nulle.

Dans l'intérieur du vase

$$\Delta\delta\varphi = 0.$$

Donc la troisième intégrale est nulle.

Sur la surface libre

$$\frac{d\delta\varphi}{dn} = \frac{d\delta\varphi}{dz} = \delta\frac{d\varphi}{dz}.$$

Donc enfin

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \varphi\,\delta\frac{d\varphi}{dz}\,d\omega.$$

Soit U le volume du liquide, ce volume est constant ; on a donc

$$\delta U = \frac{\cos\lambda t}{\lambda}\left(\int \frac{d\delta\varphi}{dn}\,d\omega + \int \frac{d\delta\varphi}{dn}\,d\omega\right) = 0,$$

donc

$$\int \delta\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Pour que $\delta\frac{A}{B}$ soit nul, il faut que $\delta B = 0$ soit une conséquence de $\delta A = 0$ et $\delta U = 0$, ce qui exige qu'à la surface libre on ait

$$\frac{d\varphi}{dz} = a\varphi + b,$$

a et b étant des constantes. Mais la fonction des vitesses n'est définie qu'à une constante près ; je puis donc supposer $b = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\delta\frac{A}{B} = 0 :$$

c'est donc que le rapport de φ à $\frac{d\varphi}{dz}$ soit constant en tous les points de la surface libre.

Ainsi la recherche des oscillations propres simples du liquide se ramène à la détermination d'une fonction φ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur du vase

$$\Delta\varphi = 0.$$

2° Sur la paroi du vase

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

3° Sur la surface libre

$$\frac{d\varphi}{dz} : \varphi = \text{const.}$$

On peut arriver à ce résultat d'une autre manière. Nous avons trouvé

$$p = gz - \lambda\varphi \cos\lambda t.$$

A la surface libre p est nul, et z est égal à la projection du déplacement sur l'axe des z, ainsi que je l'ai dit plus haut, c'est-à-dire à

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

On a donc

$$g\frac{d\varphi}{dz} = -\lambda^2\varphi.$$

La recherche des fonctions φ, qui correspondent aux différentes oscillations simples et qui sont analogues dans une certaine mesure aux fonctions fondamentales du n° **2**, le développement d'une fonction quelconque en série procédant suivant ces fonctions fondamentales, se ferait d'après des procédés analogues à ceux des premiers numéros de ce travail ou de mon Mémoire cité des *Rendiconti*.

Mais je préfère ne pas m'y attarder et passer tout de suite au cas où la profondeur du vase est très petite.

Soit h la profondeur du vase, de telle façon que la surface de la paroi ait pour équation

$$z = h(x, y).$$

Je supposerai que h est très petit ainsi que ses dérivées $\frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dy}$.

Je développe φ suivant les puissances croissantes de z et j'ai

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \ldots.$$

A la surface libre, c'est-à-dire pour $z = 0$, nous devons avoir

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi,$$

d'où

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0. \tag{1}$$

A l'intérieur nous devons avoir $\Delta\varphi = 0$, ce qui s'écrit

$$(\Delta\varphi_0 + z\Delta\varphi_1 + \ldots) + (2\varphi_2 + 6z\varphi_3 + 12z^2\varphi_4 + \ldots) = 0,$$

ou, en faisant $z = 0$,

$$\Delta\varphi_0 + 2\varphi_2 = 0. \tag{2}$$

Au fond du vase, c'est-à-dire pour $z = h$, nous devons avoir

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Comme les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$\frac{dh}{dx}, \quad \frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad -1,$$

cela peut s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dh}{dy}. \tag{3}$$

Or, pour $z = h$, on a

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi_1 + 2\varphi_2 h + 3\varphi_3 h^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi_0}{dx} + h\frac{d\varphi_1}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi_0}{dy} + h\frac{d\varphi_1}{dy} + \ldots.$$

Je substitue dans l'équation (3) en négligeant le carré de h et j'ob-

tiens

$$(4) \qquad \varphi_1 + 2\varphi_2 h = \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi_0}{dy}.$$

Tirons φ_1 et φ_2 de (1) et de (2) et substituons dans (4) il viendra

$$-\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0 = h\Delta\varphi_0 + \sum \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi_0}{dx}$$

ou

$$(5) \qquad \sum \frac{d}{dx}\left[h\frac{d\varphi_0}{dx}\right] + \frac{\lambda^2}{g}\varphi_0 = 0.$$

Au bord du vase, on a

$$z = h = 0,$$

et par conséquent on a, à la fois,

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Si nous négligeons h, nous tirons de là

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0, \qquad \varphi = 0$$

et, comme z est nul,

$$\varphi_0 = 0.$$

Ainsi la fonction φ_0 doit satisfaire à l'équation (5) en tous les points de la surface libre qui est une aire plane et, au bord de cette aire plane, elle doit s'annuler.

C'est cette condition à la limite que nous adopterons; mais je dois observer que, pour l'établir, j'ai dû supposer non seulement que h est très petit, mais que ses dérivées le sont également; de sorte que, sur le bord, le fond du vase présente une pente très douce.

Si, au contraire, j'avais supposé que près du bord la paroi du vase est verticale, j'aurais dû remplacer la condition à la limite

$$\varphi_0 = 0$$

par la suivante

$$\frac{d\varphi_0}{dn} = 0.$$

On peut arriver au même résultat d'une autre manière.

La force vive est égale à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau = \frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\int dx\,dy\int^h dz\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2.$$

Or

$$\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx} + z\frac{d\varphi_1}{dx} + \ldots\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy} + z\frac{d\varphi_1}{dy} + \ldots\right)^2 + (\varphi_1 + 2z\varphi_2 + \ldots)^2,$$

ou, puisque z est très petit,

$$\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy}\right)^2 + \varphi_1^2,$$

et, comme on a

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0,$$

la force vive est égale à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int h\,d\omega\left[\left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy}\right)^2 + \frac{\lambda^4}{g^2}\varphi_0^2\right].$$

L'énergie potentielle est égale à

$$\frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega = \frac{\lambda^2\cos^2\lambda t}{g}\int\varphi_0^2\,d\omega.$$

Mais l'équation (4) montre que φ_1 (et par conséquent λ^2) est une quantité très petite de l'ordre de h; nous devons donc négliger le terme en φ_1^2 dans l'expression de la force vive qui se réduit à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int h\,d\omega\sum\left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2.$$

D'ailleurs, nos formules montrent suffisamment que l'énergie cinétique moyenne est de l'ordre de h et l'énergie potentielle moyenne de l'ordre de λ^2; et comme, dans une oscillation simple, ces deux énergies moyennes doivent être égales, on doit conclure que λ^2 est de l'ordre de h, ce qui justifie une fois de plus la réduction que nous venons de faire.

Cela posé, la recherche des oscillations simples se ramène à la détermination des maxima et des minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int h \, d\omega \sum \left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2$$

à l'intégrale

$$B = \int \varphi_0^2 \, d\omega.$$

L'application des règles du calcul des variations nous conduirait à l'équation (5) que nous avons obtenue directement.

Comparons à un problème en apparence très différent, celui des vibrations d'une membrane tendue.

L'énergie cinétique est proportionnelle alors à l'intégrale

$$B = \int \rho \varphi^2 \, d\omega,$$

ρ désignant l'épaisseur de la membrane et φ le déplacement d'un point de la membrane par rapport à sa position d'équilibre. Ce déplacement est supposé normal à la membrane.

L'énergie potentielle est proportionnelle à l'intégrale

$$A = \int h \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] d\omega,$$

h désignant la tension de la membrane.

D'autre part, sur le bord de la membrane, la fonction φ doit s'annuler.

Le problème consiste à rechercher les maxima et les minima relatifs du rapport $\frac{A}{B}$.

Mais les intégrales A et B sont les mêmes que dans le problème qui nous occupait d'abord ; il suffit d'y faire $\rho = 1$.

Le problème des oscillations d'un liquide dans un vase peu profond est donc identique au problème des vibrations d'une membrane d'épaisseur constante, mais de tension variable.

J'ai traité complètement le problème de la membrane dans mon Mémoire cité des *Rendiconti;* j'y ai supposé, il est vrai, la tension constante ; mais mon analyse serait encore applicable, *mutatis mutandis,* au cas de la tension variable.

§ 7. — Influence de la courbure.

Supposons maintenant que le vase soit assez grand pour que la surface libre d'équilibre ne puisse plus être regardée comme plane, mais doive être considérée comme sphérique.

Je suppose toujours qu'il n'y a pas de rotations et que l'on néglige l'attraction du liquide.

On aura, dans une oscillation simple, pour la fonction des vitesses,

$$\Phi = \varphi \sin \lambda t,$$

φ étant indépendant du temps. A l'intérieur du liquide, il viendra

$$\Delta \varphi = 0.$$

La pression p sera, en négligeant le carré de Φ,

$$p = \frac{a}{r} - \frac{d\Phi}{dt} - b,$$

a et b désignent des constantes et r la distance au centre de la sphère. Cela peut s'écrire d'ailleurs

$$p = \frac{a}{r} - \lambda \varphi \cos \lambda t - b.$$

La force vive est égale encore à

$$\frac{\sin^2 \lambda t}{2} \int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

et l'énergie potentielle à

$$\frac{1}{2}\frac{a}{R^2}\int \rho^2\, d\omega.$$

L'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre sphérique d'équilibre : R est le rayon de cette surface et $R+\rho$ la distance au centre d'une molécule de la surface libre après la déformation.

Les projections d'une molécule sur les trois axes sont

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx},\qquad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dy},\qquad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

La projection sur le rayon vecteur sera

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Il est clair qu'en un point de la surface libre on a

$$\frac{d\varphi}{dn}=\frac{d\varphi}{dr}=\frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dz}.$$

L'énergie potentielle est donc égale à

$$\frac{\cos^2\lambda t}{\lambda^2}\frac{a}{2R^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega.$$

Il faut maintenant chercher les maxima et les minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A=\int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

à l'intégrale

$$B=\int\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\delta A=\int\sum\frac{d\varphi}{dx}\,\delta\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau=\int\varphi\frac{d\delta\varphi}{dr}\,d\omega+\int\varphi\,\delta\frac{d\varphi}{dn}\,d\omega'-\int\varphi\,\delta\Delta\varphi\,d\tau.$$

Les notations ont même signification que dans le paragraphe pré-

cèdent; on a encore

$$\delta\Delta\varphi = 0,$$

et sur la paroi du vase

$$\delta\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Il reste

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \varphi \frac{d\delta\varphi}{dr}\, d\omega.$$

D'autre part

$$\frac{1}{2}\delta B = \int \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\delta\varphi}{dr}\, d\omega.$$

Enfin, U étant le volume total du liquide, on doit avoir

$$\delta U = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{d\delta\varphi}{dr}\, d\omega = 0.$$

Il faut que $\delta A = 0$ soit une conséquence de $\delta B = 0$, $\delta U = 0$. Cela exige

$$\frac{d\varphi}{dr} = \alpha\varphi + \beta,$$

Comme φ n'est déterminé qu'à une constante près, je puis supposer $\beta = 0$. D'ailleurs, à la surface, la pression est nulle; d'où

$$\frac{a}{r} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b,$$

ou

$$\frac{a}{R+\rho} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b,$$

ou

$$\frac{a}{R} - \frac{a\rho}{R^2} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b.$$

Il faut prendre la constante b égale à $\frac{a}{R}$ et il vient, en remplaçant ρ par sa valeur,

$$\frac{a}{\lambda}\cos\lambda t\frac{d\varphi}{dr} = \lambda\varphi\cos\lambda t,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\lambda^2 \varphi}{a}.$$

Passons maintenant au cas où la profondeur est infiniment petite.

Soit $R + \rho$ la distance d'une molécule au centre; développons φ suivant les puissances de ρ et écrivons

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \rho + \varphi_2 \rho + \ldots.$$

On devra avoir à la surface libre

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \varphi_1,$$

d'où

$$\varphi_1 = \frac{\lambda^2 \varphi_0}{a}.$$

La force vive est égale à

$$\frac{\sin^2 \lambda t}{2} \int h \, d\omega \left[D\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right].$$

Ici h est la profondeur et $D\varphi$ le carré de la composante de la vitesse perpendiculaire au rayon vecteur.

On peut prendre

$$D\varphi = D\varphi_0, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \varphi_1 = \frac{\lambda^2 \varphi_0}{a},$$

et, comme λ^2 est très petit, négliger le terme en $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2$. Il reste pour la force vive

$$\frac{\sin^2 \lambda t}{2} \int h \, D\varphi_0 \, d\omega.$$

L'énergie potentielle est, d'autre part,

$$\frac{\cos^2 \lambda t}{\lambda} \frac{a}{2 R^2} \int \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega = \frac{\lambda^2}{a} \frac{\cos^2 \lambda t}{2 R^2} \int \varphi_0^2 \, d\omega.$$

Le problème est donc ramené à la recherche des maxima et minima

relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int h \, D\varphi_0 \, d\omega$$

à l'intégrale

$$B = \int \varphi_0^2 \, d\omega.$$

De plus, φ_0 doit s'annuler au bord de la mer.

Considérons sur la sphère les courbes $\varphi_0 = \text{const.}$; envisageons deux de ces courbes infiniment voisines, correspondant aux valeurs φ_0 et $\varphi_0 + d\varphi_0$; soit $d\nu$ la distance d'un point de la seconde courbe à la première courbe, estimée suivant la normale à cette première courbe; nous aurons

$$D\varphi_0 = \left(\frac{d\varphi_0}{d\nu}\right)^2.$$

Faisons la représentation conforme de la surface sphérique de la mer sur une aire plane; par exemple par projection stéréographique.

Considérons les projections des deux courbes $\varphi_0 = \text{const.}$ et soit $d\nu'$ la distance de ces deux courbes estimée suivant la normale; on aura

$$d\nu' = \gamma \, d\nu,$$

γ étant le rapport de similitude d'une figure plane infiniment petite à la figure sphérique correspondante.

Soit $d\omega'$ la projection de l'élément $d\omega$ de la sphère, on aura

$$d\omega' = \gamma^2 \, d\omega.$$

Il vient ainsi

$$A = \int h \left(\frac{d\varphi_0}{d\nu'}\right)^2 d\omega',$$

$$B = \int \frac{1}{\gamma^2} \varphi_0^2 \, d\omega'.$$

Rapportons la figure plane à deux axes rectangulaires, celui des x' et celui des y', nous aurons

$$d\omega' = dx' \, dy',$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\nu'}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy'}\right)^2,$$

d'où

$$A = \int h\, dx'\, dy' \left[\left(\frac{d\varphi_0}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy'}\right)^2 \right],$$

$$B = \int \frac{1}{\gamma^2}\, dx'\, dy'\, \varphi_0^2.$$

Le problème est ainsi ramené à celui de la membrane, avec une épaisseur variable $\frac{1}{\gamma^2}$ et une tension variable h.

Je me réserve de revenir dans un prochain numéro sur le même sujet. J'ai jusqu'ici négligé les effets de la rotation du globe et de la force centrifuge composée; il me faut maintenant en tenir compte; les résultats obtenus subsisteront dans leurs traits généraux, mais ils seront sensiblement modifiés et compliqués.

La recherche des oscillations propres simples dans le mouvement relatif se ramène, comme dans le cas du mouvement absolu, à l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et le principe de moindre action nous apprend que cette intégration se rattache aussi à une question de minimum.

Après avoir exposé les principes généraux qui régissent cette question, nous les appliquerons d'abord au cas d'un liquide oscillant dans un vase tournant assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface; puis, enfin, au cas des mers; mais nous négligerons toujours l'attraction interne du liquide.

Fondements de la théorie des séries divergentes sommables;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Les géomètres antérieurs à Abel et à Cauchy faisaient usage sans scrupule des séries divergentes; par exemple, l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x} \tag{1}$$

leur donnait pour $x = -1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Cette manière de procéder n'avait évidemment aucune rigueur; peut-être s'est-on trop hâté de conclure qu'elle ne reposait sur aucun fondement et, au lieu de rechercher les raisons pour lesquelles les résultats qu'elle fournissait étaient presque toujours exacts, on a proscrit absolument du calcul les séries divergentes. Cette réaction violente était peut-être nécessaire pour donner aux mathématiciens l'habitude d'une rigueur absolue; actuellement, cette habitude est prise depuis longtemps et nul n'oserait donner comme certain un résultat qui ne serait pas déduit rigoureusement de résultats certains, ou du moins que son auteur ne croirait point tel. Aussi ne peut-il y avoir aucun inconvénient à se demander si l'emploi des séries divergentes ne serait pas dans certains cas parfaitement légitime, et si l'égalité (2), par exemple, n'exprimerait pas un *fait mathématique* aussi certain que la relation (1) d'où on l'a déduite.

Voici le point de vue auquel je me suis placé pour faire cette recherche.

On utilise souvent, pour représenter une fonction analytique, un développement en série convergente dans une région moins étendue que la région où la fonction donnée existe ; c'est ce qui arrive presque constamment pour le développement de Taylor. Considérons, par exemple, l'égalité (1) ; si l'on donne à x une valeur dont le module dépasse l'unité, le premier membre n'est pas convergent, tandis que, si x est différent de *un*, le second membre a une valeur numérique parfaitement déterminée. Je me suis proposé de rechercher une relation entre les valeurs numériques des termes successifs du premier membre et la valeur numérique du second membre, et je suis arrivé au résultat suivant : dans des cas très étendus, *la valeur numérique du second membre peut être calculée au moyen des valeurs numériques des termes du premier membre, par un procédé ne dépendant que de ces valeurs numériques.* Dès lors, il est très légitime de dire que cette valeur numérique est la somme de la série numérique (divergente) que forme le premier membre.

Il m'a paru préférable de donner à l'exposition une forme synthétique ; j'espère que les lecteurs voudront bien ne pas se choquer des définitions du début, au premier abord un peu arbitraires ; s'ils ont la patience de terminer la lecture de ce Mémoire, ils se rendront compte que cet arbitraire se réduit à rien ou à bien peu de chose.

Définition et principales propriétés de la LIMITE GÉNÉRALISÉE.

Considérons une suite de nombres *réels, rangés dans un ordre déterminé :*

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

Nous ferons correspondre à cette suite la fonction de a :

$$x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots + x_n \frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

et nous supposerons les x_n tels que $x(a)$ soit une fonction entière

de a. Supposons, de plus, que, a croissant indéfiniment par valeurs positives, on ait

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a} x(a)] = x.$$

Nous dirons alors que la suite (1) a une *limite généralisée* et que cette limite est x.

Considérons une seconde suite

(2) $$y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots,$$

admettant comme limite généralisée y, et désignons par α et β deux constantes réelles; *si nous posons*

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n,$$

la suite

(3) $$z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$$

admettra manifestement une limite généralisée z, *laquelle sera égale à* $\alpha x + \beta y$.

Si, à partir d'un certain rang, les x_n *sont tous nuls,* $x(a)$ se réduit à un polynome et *la suite* (1) *admet zéro pour limite généralisée;* dans ce cas particulier, la définition se confond avec la définition ordinaire de la limite; on va voir qu'il en est de même dans tous les cas où cette dernière définition est applicable.

Supposons qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (2) soient tous nuls et que la constante désignée par α se réduise à l'unité; la suite (3) sera, à partir d'un certain rang, identique avec la suite (1); nous avons d'ailleurs $y = 0$ et par suite $z = x$. Par conséquent, *on peut, sans altérer la limite généralisée d'une suite de quantités, modifier d'une manière quelconque la valeur d'un nombre limité de ces quantités.*

Si les termes de la suite (1) sont tous égaux, on a, en désignant par x leur valeur commune, $x(a) = xe^a$. La *limite généralisée* est donc x. En combinant cette remarque avec une proposition précédente, on voit que, *si l'on ajoute un même nombre x à tous les termes*

d'une suite admettant une limite généralisée, on obtient une nouvelle suite admettant aussi une limite généralisée, égale à la précédente, augmentée de x.

Il est clair que, si tous les termes de la suite (1) sont positifs, la fonction $x(a)$ est positive lorsque a est positif, et la limite généralisée, si elle existe, est positive ou nulle; il en est de même, d'ailleurs, si les termes de la suite (1) ne sont positifs qu'à partir d'un certain rang, puisqu'on a le droit de modifier la valeur d'un nombre limité d'entre eux.

Les remarques précédentes montrent que si, *à partir d'un certain rang les x_n sont compris entre deux nombres fixes p et q, la limite généralisée, si elle existe, est comprise entre p et q*. Il en résulte que, si les x_n ont une limite, sa valeur coïncide avec celle de la *limite généralisée*, qu'on s'assure aisément exister toujours dans ce cas. Si les x_n, à partir d'un rang assez élevé, dépassent toute quantité assignable, il en est de même de x (mais il ne s'agit pas des valeurs absolues).

Nous allons démontrer une autre proposition très importante.

Posons

$$\varphi(a) = e^{-a}x(a);$$

nous aurons, en désignant les dérivées par des accents,

$$\varphi'(a) = e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a).$$

Or, on a évidemment,

$$\varphi(a) - \varphi(a_0) = \int_{a_0}^{a} \varphi'(a)\,da = \int_{a_0}^{a} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]\,da.$$

Nous nous plaçons dans le cas où $\varphi(a)$ tend vers une limite lorsque a augmente indéfiniment; l'intégrale suivante, dans laquelle $x(a)$ est une fonction entière,

$$\int_{a_0}^{\infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]\,da,$$

a donc un sens (cette intégrale pourrait servir à définir la limite généralisée). On en conclut que l'on a

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)] = 0.$$

ou bien

(4) $$\lim_{a=\infty}[e^{-a}x'(a)] = \lim_{a=\infty}[e^{-a}x(a)] = x.$$

Or, nous avons

$$x'(a) = x_1 + x_2\frac{a}{1} + x_3\frac{a^2}{2!} + x_4\frac{a^3}{3!} + \ldots + x_{n+1}\frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

c'est-à-dire que $x'(a)$ correspond à la suite

(1)' $$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots,$$

de la même manière que $x(a)$ correspond à la suite

(1) $$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Nous concluons de là, et de la relation (4), qu'on n'altère pas la *limite généralisée* d'une suite de quantités en supprimant un nombre limité de ces quantités, ce qui diminue d'un nombre fixe le rang de celles qui occupent un rang assez élevé. Ce fait nous sera très utile dans l'étude des séries.

Ainsi, en résumé, notre définition de la *limite généralisée* coïncide avec la définition ordinaire lorsque celle-ci est applicable; elle en possède bien des propriétés, mais en diffère surtout par le fait qu'on n'a pas le droit, dans le cas où la limite ordinaire n'existe pas, de supprimer *une infinité* de termes dans la suite considérée ou d'en modifier l'ordre; mais ces opérations sont permises sur un nombre limité quelconque.

Séries numériques; caractères de sommabilité.

Considérons une série à termes réels

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et désignons par s_n la somme de ses n premiers termes ($s_0 = 0$); nous

dirons que la série est sommable si la suite

$$s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$$

a une *limite généralisée s*, et cette limite sera dite *la somme de la série*.

Il résulte immédiatement des propositions précédemment établies que toute modification portant sur un nombre limité de termes ne saurait modifier la sommabilité et modifie la somme d'une manière évidente. On peut ajouter terme à terme plusieurs séries sommables, multipliées d'ailleurs par des nombres quelconques; on obtient une nouvelle série sommable, dont la somme s'exprime au moyen des sommes des séries données de la même manière que chacun de ses termes au moyen des termes correspondants de ces séries. Enfin, si une série est convergente, notre définition de la somme coïncide avec la définition habituelle.

Supposons que la série proposée soit sommable; d'après ce qui précède, les deux suites

$$(5) \qquad s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \ldots,$$

$$(6) \qquad s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

ont une même *limite généralisée s*; si l'on retranche terme à terme la suite (5) de la suite (6), on en conclut que la suite

$$(7) \qquad u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

admet zéro pour limite généralisée. Ainsi, pour qu'une série soit sommable, il est *nécessaire que le terme général ait zéro pour limite généralisée.*

Nous allons maintenant rechercher des conditions suffisantes; posons

$$s(a) = s_0 + s_1 a + \frac{s_2 a^2}{2!} + \frac{s_3 a^3}{3!} + \ldots,$$

$$u(a) = u_0 + u_1 a + u_2 \frac{a^2}{2!} + u_3 \frac{a^3}{3!} + \ldots,$$

on voit aisément que l'on a

$$\frac{d}{da}[e^{-a}s(a)] = e^{-a}u(a).$$

Donc, pour que la série considérée soit sommable, il est *nécessaire et suffisant que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a}u(a)\,da$$

ait un sens [1]. On retrouve ainsi la condition nécessaire indiquée ; pour trouver une condition suffisante, nous exprimerons, par exemple, que l'on a

$$(8)\qquad \lim_{a=\infty}[a^2e^{-a}u(a)] = 0,$$

car l'intégrale a alors un sens. Or, on a

$$a^2u(a) = u_0a^2 + u_1a^3 + \ldots + u_n\frac{a^{n+2}}{n!} + \ldots,$$

et si nous posons

$$c_{n+2} = (n+1)(n+2)u_n,$$

nous aurons

$$a^2u(a) = c(a) = c_2\frac{a_2}{2!} + c_3\frac{a^3}{3!} + \ldots + c_{n+2}\frac{a^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots.$$

La relation (8) exprime donc que c_n admet zéro pour limite généralisée. Ainsi, *pour qu'une série de terme général u_n soit sommable, il est suffisant que le produit $(n+1)(n+2)\,u_n$ admette zéro pour limite généralisée.* Comme il est permis d'augmenter ou de diminuer d'un même nombre le rang de tous les termes, on peut, dans cet énoncé, remplacer $(n+1)(n+2)u_n$ par $(n+k)(n+k-1)u_n$, k étant un entier positif ou négatif quelconque. Ce critère nous suffira pour les applications que nous avons en vue ; il serait intéressant d'en

[1] Cette intégrale peut servir à définir la somme et à en étudier les propriétés; je me contente de signaler ce point de vue.

rechercher d'autres ; on y parviendrait sans doute aisément par l'emploi des dérivées à indices quelconques.

Nous allons, à titre d'exemple, sommer quelques séries divergentes ; reprenons d'abord la série

$$(2) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

On a ici

$$s_{2n-1} = 1, \qquad s_{2n} = 0,$$

$$s(a) = sha = \frac{e^a - e^{-a}}{2},$$

$$e^{-a} s(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2a}, \qquad s = \frac{1}{2}.$$

D'ailleurs

$$u_{n-1} = 1, \qquad u_{2n} = -1, \qquad u(a) = e^{-a},$$

le terme général a bien zéro pour limite généralisée.

Soit maintenant la série

$$s = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots$$

On a ici $u(a) = e^{-2a}$; donc la série est sommable ; or, on a

$$s = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + \dots) = 1 - 2s;$$

donc $s = \frac{1}{3}$; c'est aussi le résultat que fournirait un calcul direct. Nous allons faire ce calcul sur la série

$$1 - m + m^2 - m^3 + \dots,$$

qui comprend la précédente comme cas particulier. On a ici

$$s_n = \frac{1 + (-1)^{n-1} m^n}{1 + m}$$

et, par suite,

$$s(a) = \frac{e^a}{1 + m} - \frac{e^{-ma} - 1}{m(1 + m)}.$$

Si nous supposons que m soit positif, on en conclut

$$\lim_{a=\infty} e^{-a}s(a) = \frac{1}{1+m}.$$

Il serait aisé de vérifier sur ces exemples, et en particulier sur la série (2), que l'on ne peut pas, en général, modifier l'ordre d'une infinité de termes sans changer la valeur de la série, même si chaque terme est déplacé seulement d'un rang. Il y a là une différence apparente avec les séries convergentes; cette différence tient à ce que les termes ne tendent pas vers zéro. J'ai démontré, en effet [1], que, pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente n'altère pas sa somme, il suffit que le produit de la valeur absolue du terme de rang n par le déplacement maximum des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tende vers zéro pour n infini; il ne suffit pas toujours que le produit de la valeur absolue du terme de rang n, par son déplacement, tende vers zéro; ces conditions ne sauraient être vérifiées si les termes ne tendent pas vers zéro; il y aurait lieu de rechercher si la première subsiste en attribuant un signe aux déplacements, et tenant compte des signes des termes ainsi que de la notion de *limite généralisée*.

Séries entières à termes réels. Généralisation du théorème d'Abel.

Considérons la série à termes réels

$$(9) \qquad u_0 + u_1\rho + u_2\rho^2 + \ldots + u_n\rho^n + \ldots.$$

Si nous posons

$$u_n\rho^n = v_n$$

et

$$u(a) = u_0 + u_1 a + u_2\frac{a^2}{2!} + \ldots,$$

$$v(a) = v_0 + v_1 a + v_2\frac{a^2}{2!} + \ldots.$$

[1] *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* (*Bulletin des Sciences mathématiques*; 1890).

nous avons

$$v(a) = u(a\rho).$$

Supposons que la série (9) soit sommable pour $\rho = 1$; nous savons qu'il est nécessaire, pour cela, que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a} u(a)] = 0.$$

Je dis qu'il en résulte que la série (9) est sommable pour les valeurs de ρ comprises entre zéro et un. En effet, il suffit, pour cela, que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} [a^2 v(a) e^{-a}] = 0.$$

Or nous avons

$$a^2 v(a) e^{-a} = [u(a\rho) e^{-a\rho}][a^2 e^{a(\rho-1)}].$$

Or, ρ étant positif, $a\rho$ augmente indéfiniment par valeurs positives en même temps que a ; d'autre part, $\rho - 1$ est supposé négatif ; les deux facteurs du second membre tendent donc vers zéro lorsque a augmente indéfiniment, ce qui prouve le fait énoncé.

Nous pouvons démontrer aussi que la série obtenue en dérivant terme à terme, par rapport à ρ, la série (9) est aussi sommable, si ρ est compris entre zéro et un. En désignant par w_n son terme général, on a

$$w_n = n u_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho} v_n,$$

$$w(a) = w_0 + w_1 a + \ldots = \frac{1}{\rho} v'(a).$$

Pour que $a^2 w(a) e^{-a}$ tende vers zéro, pour a infini, il suffit qu'il en soit ainsi de $a^3 v(a) e^{-a}$, et la démonstration est la même que précédemment. La proposition s'étend évidemment aux séries dont les termes sont des dérivées d'ordre quelconque des termes de la série (9). Nous verrons plus loin que les sommes de ces séries, qui sont des fonctions de ρ, sont les dérivées successives par rapport à ρ de la somme de la série (9).

Séries à termes complexes.

Les définitions précédentes s'étendent aux séries à termes complexes ; il y a lieu de considérer séparément la partie réelle et la partie imagi-

naire, et il importe de remarquer qu'on ne peut s'affranchir de cette double considération par l'étude de la série des modules, car nous avons vu qu'une série à termes positifs n'est sommable que si elle est convergente.

Séries dont les termes dépendent d'une variable; notion de l'uniformité.

Nous avons dit qu'une suite de quantités

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

tend vers une *limite généralisée* x, si l'on a

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} x(a) = x$$

en posant

$$x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots.$$

Supposons que $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ dépendent d'une variable complexe z (1) et soient dans un certain domaine des fonctions analytiques de z; la fonction $x(a)$ est alors une fonction $x(a, z)$; nous dirons que la suite des fonctions x_n tend *uniformément* vers la *limite généralisée* $x(z)$ si le produit $e^{-a}x(a, z)$ tend *uniformément* vers $x(z)$ lorsque a augmente indéfiniment. En d'autres termes, à tout nombre positif ε, on doit pouvoir faire correspondre un nombre a_0 tel que l'inégalité

$$a > a_0$$

entraîne

$$|e^{-a}x(a, z) - x(z)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de z appartenant au domaine considéré. On

(1) On verra aisément les légers changements à introduire dans le langage si les x dépendent d'*une* ou *plusieurs* variables, *réelles* ou *complexes*.

peut dire aussi que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} [e^{-(n+1)} x(n+1, z) - e^{-n} x(n, z)]$$

est uniformément convergente; sa somme est évidemment $x(z) - x_0$. Ce dernier fait prouve que dans le domaine considéré $x(z)$ est une fonction analytique de z.

Ainsi, *lorsqu'une suite de fonctions d'une variable complexe* z, *analytiques dans un domaine* D, *tend uniformément dans ce domaine vers une limite généralisée, cette limite est aussi une fonction analytique dans* D.

Considérons maintenant une série dont les termes sont des fonctions de z, analytiques dans D; cette série sera dite *uniformément sommable* si la somme $s_n(z)$ de ses n premiers termes tend uniformément vers une limite généralisée $s(z)$. Comme les $s_n(z)$ sont des fonctions analytiques dans D, on voit que *si une série est uniformément sommable dans un domaine où ses termes sont analytiques, sa somme est aussi une fonction analytique.*

On peut intégrer terme à terme une série uniformément sommable; la somme de la série obtenue est l'intégrale de la somme de la série donnée.

Cette proposition est d'ailleurs exacte que la variable d'intégration soit complexe ou réelle; on peut l'appliquer aux fonctions de ρ précédemment considérées qu'on établit aisément être uniformément sommables dans tout intervalle compris dans l'intervalle $0 < \rho < 1$.

Proposition fondamentale.

Cette proposition, qui justifie complètement tout ce qui précède en montrant que les *sommes* obtenues pour les séries divergentes correspondent bien à une réalité, est la suivante :

Si une série uniformément sommable dans un domaine d'un seul tenant est uniformément convergente dans une portion de ce do-

maine [1], *sa somme est dans tout le domaine une même fonction analytique.* La somme est définie comme il a été dit lorsque la série est sommable et à la manière ordinaire lorsqu'elle est convergente. La démonstration est d'ailleurs intuitive : il suffit d'observer que ces deux définitions de la somme coïncident dans la région où la série est convergente. Soit

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

la série considérée; elle est uniformément convergente dans un domaine D et définit dans ce domaine une fonction analytique $f(z)$. Souvent cette fonction analytique peut être prolongée en dehors du domaine D dans lequel la série est convergente. Supposons que, dans une région D' comprenant D, la série soit uniformément sommable : en un point A de D', on obtiendra la valeur numérique de la fonction analytique prolongée $f(z)$ en cherchant la somme de la série numérique *divergente* formée par les valeurs des fonctions $f_n(z)$ au point A.

Supposons qu'une série entière soit uniformément sommable dans une région D; on démontre aisément qu'elle est uniformément sommable dans la région couverte par les segments de droite qui joignent l'origine aux divers points de D, ou tout au moins dans toute région intérieure à celle-là. Cette région en forme de secteur comprend un secteur du cercle de convergence de la série; on peut donc affirmer que la somme de la série, en un point quelconque de la région D, donne la valeur en ce point de la fonction analytique définie par la série dans son cercle de convergence.

---

(1) On pourrait montrer que, si une série est à la fois convergente et uniformément sommable, elle est uniformément convergente.

Détermination, dans quelques cas simples, du domaine de sommabilité uniforme.

Reprenons d'abord la série déjà considérée

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots.$$

Nous avons

$$s_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z}$$

et

$$s(a,z) = \sum s_n(z)\frac{a^n}{n!} = \frac{e^a}{1-z} - \frac{e^{az}}{1-z},$$

$$e^{-a}s(a,z) = \frac{1}{1-z} - \frac{e^{a(z-1)}}{1-z}.$$

Pour que cette série soit sommable, il est nécessaire et suffisant que la partie réelle de z soit inférieure à *un* : elle est d'ailleurs uniformément sommable dans le domaine défini par la condition que la partie réelle de z est inférieure à un nombre fixe K inférieur à *un*. Le lieu des points z dont la partie réelle est égale à *un* est la tangente au cercle de rayon *un* au point $z = 1$, c'est-à-dire la tangente au cercle de convergence de la série donnée au point singulier unique qu'elle a sur ce cercle. Le domaine dans lequel la série est sommable est la partie du plan située du même côté que le cercle par rapport à cette tangente, et la sommabilité est uniforme dans toute région intérieure à celle-là.

Il est aisé de voir que cette règle s'applique aux fonctions de la forme $\frac{A}{z-\alpha}$, ainsi qu'à leurs dérivées et intégrales d'ordre quelconque; si l'on a une somme d'un nombre limité de termes de cette forme

$$\varphi(z) = \frac{A}{(z-\alpha)^m} + \frac{B}{(z-\beta)^n} + \frac{C}{(z-\gamma)^p} + D\log(z-\delta),$$

m, n, p étant des entiers positifs, la région de sommabilité uniforme du développement de $\varphi(z)$ en série entière s'obtient en joignant par

des droites l'origine aux points singuliers α, β, γ, δ, en menant en chacun de ces points la perpendiculaire à la droite correspondante et en supprimant toutes les portions du plan situées de celui des côtés de chacune de ces perpendiculaires qui ne contient pas l'origine.

Cette règle peut s'étendre, dans des cas très généraux, à des fonctions $\varphi(z)$ qui seraient la somme d'une infinité de termes; il y aurait lieu d'étudier à ce point de vue l'expression générale donnée par M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes et aussi certaines fonctions signalées dans ma Thèse.

Pour plus de netteté, nous allons nous borner à considérer la fonction $D_z \log \Gamma(1+z)$ et montrer que son développement, suivant les puissances croissantes de z, est uniformément sommable dans tout le domaine défini par l'inégalité

$$\text{partie réelle de } z > h > -1.$$

On a, en effet,

$$-C - D_z \log \Gamma(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p} \right).$$

Si nous développons suivant les puissances croissantes de z, il est clair que la somme $s_n(z)$ des n premiers termes est

$$s_n(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}} \frac{p^{n+1} + (-1)^n z^{n+1}}{z+p} - \frac{1}{p} \right).$$

On a donc

$$s(a, z) = \sum \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} s_n(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{e^a - e^{-a\frac{z}{p}}}{z+p} - \frac{e^a}{p} \right)$$

et, par suite,

$$e^{-a} s(a, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p} \right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{e^{-a\left(\frac{z}{p}+1\right)}}{z+p}.$$

On voit, dès lors, aisément que, lorsque a augmente indéfiniment,

le second terme tend vers zéro, et si l'on suppose z compris dans la région indiquée, cette expression tend uniformément vers zéro, ce que nous voulions démontrer.

Applications numériques.

Nous avons déjà indiqué comment on peut ramener la recherche de la limite de $e^{-a}s(a)$ pour a infini à la sommation d'une série convergente : la sommation d'une série divergente sommable est ainsi ramenée à la sommation d'une série convergente dont les termes sont des séries convergentes. Pour qu'une telle expression analytique prête à un calcul numérique précis, il est nécessaire que l'on sache évaluer l'erreur commise quand on néglige certains termes ; il en est de même d'ailleurs pour toute série convergente : et c'est là une grande difficulté théorique qui ne peut être levée que dans chaque cas particulier par une étude souvent très minutieuse. Cela n'empêche pas les calculateurs d'utiliser souvent les séries convergentes sans évaluer à chaque instant l'erreur commise; ils se contentent de la remarque suivante, rarement en défaut dans la pratique : l'erreur commise est, en général, du même ordre de grandeur que le dernier terme calculé. Il est d'ailleurs évident que cette manière de procéder n'a rien de rigoureux et exposerait à des erreurs graves si on lui donnait la valeur d'un principe; mais, dans le cas où les termes de la série considérée sont assez *régulièrement* décroissants, l'erreur commise est relativement facile à évaluer ainsi avec une approximation suffisante.

Dans le cas des fonctions de la forme $\varphi(z)$ (p. 116), on peut, en procédant comme nous l'avons fait pour $D_z \log\Gamma(1+z)$, évaluer l'erreur commise et s'assurer qu'elle décroît, en général, rapidement lorsque n et a augmentent. Aussi ai-je préféré effectuer un calcul numérique sur une série où cette évaluation directe est plus difficile et dont je n'ai même pas démontré la sommabilité; mais nous savons quelle est sa somme, si elle est sommable. En faisant $x = 2$, $m = \frac{1}{2}$ dans la formule qui donne $(1+x)^m$, on obtient, en se servant de Tables à sept décimales :

$$\sqrt{3} = 1 + 1 - 0,5 + 0,5 - 0,625 + 0,875 - 1,3125 + 2,0625$$
$$- 3,351563 + 5,5859375 - 9,496093 + 16,40234 - 28,70410$$
$$+ 50,781418 - 90,68605 + 163,23485 - 295,8631 + 539,51525$$
$$- 989,1112 + 1822,043 - 3370,787 + 6260,033 - 11666,45$$
$$+ 21811,14 - 40895,89 + 76884,27 - 144897,29 + 273694,9$$
$$- 518065,3 + 982537,7 - 1866821,5 + 3552983 - 6772872$$
$$+ 12930030 - 24719170 + \ldots.$$

J'ai poussé le calcul jusqu'à $n = 34$ en me servant jusqu'à $n = 30$ des valeurs de $n!$ qui se trouvent dans les Tables de Schrön; j'ai pris dès lors a aussi grand que possible et égal à 8; les sommes successives s_n sont les suivantes :

1; 2; 1,5; 2; 1,375; 2,250; 0,9375; 3; − 0,35156; 5,23437;
− 4,261719; 12,1406; − 16,5635; 34,2207; − 56,4653;
106,7695; − 189,0937; 350,4216; − 638,6896; 1183,353;
− 2187,434; 4072,599; − 7593,851; 14217,29; − 26678,60;
50205,67; − 94691,6; 179003,3; − 339062; 643475,7;
− 1223345; 2329638; − 4443234; 8486796; − 16232374; ....,

et leurs produits par $\frac{8^n}{n!}$ à quelques millièmes près sont :

1; 16; 48; 170,667; 234,667; 614,400; 341,333; 1248,304;
− 146,285; 1936,028; − 1261,019; 2612,613; − 2376,264;
3021,192; − 2848,613; 2872,747; − 2543,883; 2218,437;
− 1797,085; 1401,945; − 1036,595; 735,220; − 498,511;
324,632; − 203,056; 122,284; − 70,963; 39,747; − 21,511;
11,261; − 5,709; 2,806; − 1,338; 0,619; − 0,278; ....

Les termes sont maintenant régulièrement décroissants et alternativement positifs et négatifs; on aura deux valeurs approchées, l'une par excès et l'autre par défaut, en prenant successivement un nombre pair et impair de termes; on trouve ainsi 5163,076 et 5162,795 dont les quotients par e^8 sont respectivement 1,731929 et 1,732019, alors

que la valeur exacte est 1,732051.... *Ce résultat paraîtra très satisfaisant* ([1]).

Il est donc extrêmement vraisemblable que la série du binome est sommable pour $m = \frac{1}{2}$, $x = 2$ et probablement aussi pour d'autres valeurs; il serait intéressant d'en donner une démonstration directe et aussi d'étudier, au point de vue du calcul numérique, la généralisation que nous allons indiquer et de la comparer avec l'emploi de e^a.

Généralisation des résultats précédents.

J'ai déjà indiqué (*Comptes rendus*, 30 décembre 1895) comment on peut, pour définir la somme d'une série divergente, introduire une fonction entière en grande partie arbitraire. Soit

$$\varphi_0(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a_n + \ldots$$

une fonction entière telle que, lorsque a augmente indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi(a)}{a^n}$ augmente indéfiniment pour toute valeur fixe de n. Étant donnée une suite de quantités

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots,$$

nous poserons

$$\theta(a) = \frac{1}{\varphi(a)}\left[c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \ldots + c_a a^n s_n + \ldots\right],$$

et nous appellerons la limite de cette quantité, pour a infini positif, la *limite généralisée* de s_n.

On démontre aussi aisément que, dans le cas où $\varphi(a) = e^a$, le théorème fondamental énoncé page 114, et il est aisé d'en conclure que dans des cas très généraux cette définition de la limite est indépendante de la fonction $\varphi(a)$: elle n'en dépend pas dans toute région où $s_0, s_1, \ldots, s_n$, étant fonctions d'une variable, la sommabilité est uni-

([1]) Je dois remercier un de mes élèves, M. E. Lemaire, qui a bien voulu m'aider à revoir ces calculs.

forme. Seulement la région de sommabilité dépend du choix de $\varphi(a)$. Nous nous bornerons à signaler que l'on obtient des résultats intéressants en prenant $\varphi(a) = e^{a^2}$ et plus généralement $\varphi(a) = e^{a^k}$, k étant un entier.

Conclusions.

On voit que les séries divergentes sommables peuvent être aussi utiles en Analyse que les séries convergentes. La théorie qui vient d'en être esquissée est sans doute bien incomplète, et, dès lors, on en aperçoit bien moins d'applications que de la théorie des séries convergentes qui, depuis plus d'un siècle, s'enrichit chaque jour de résultats nouveaux. Mais je suis persuadé que, lorsque certains résultats seront acquis, lorsqu'on connaîtra la somme de nombreuses séries numériques, et aussi des caractères de sommabilité plus étendus, on verra s'élargir chaque jour le champ des applications. Il ne me reste qu'à émettre le vœu de voir la notion de somme s'étendre aux séries divergentes dans lesquelles s_n augmente indéfiniment par valeurs de même signe et pour lesquelles notre méthode ne donne aucun résultat. Rien ne prouve qu'il soit impossible de parvenir à ces sommes et de jeter ainsi un jour tout nouveau sur l'étude des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions non uniformes ([1]).

([1]) J'ai découvert pendant l'impression de ce Mémoire un passage d'Abel qui pourrait lui servir d'épigraphe et que je me permets de citer ici :

« Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 - 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots,$$

n étant un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car, à l'exception des cas les plus simples, par exemple, les séries géométriques, il ne se trouve dans les Mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus*

grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. *Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant.* »

16 janvier 1826.

(Lettre d'Abel à Holmboe). (*Œuvres*, t. II, p. 256-257.)

J'ai eu connaissance aussi, pendant que le Mémoire était sous presse, d'une Note de M. Pincherle, publiée le 19 janvier 1896, dans les *Rendiconti de la R. Accademia dei Lincei*, et qui, de même qu'un Mémoire de M. Padé paru dans le tome XVIII des *Acta Mathematica*, semble avoir quelque rapport avec les sujets ici traités ; il y aurait intérêt à étudier de près ces rapports ; mais je tiens à remarquer que j'utilise seulement les valeurs numériques des termes d'une série sommable pour en calculer la valeur, tandis que MM. Padé et Pincherle transforment une série divergente en une expression analytique convergente, en se servant de la nature analytique des termes de la série.

Sur la déformation des surfaces [1];

PAR M. GUICHARD,
Professeur à la Faculté de Clermont.

Introduction.

Nous avons cherché surtout à mettre en évidence les propriétés des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation. Nous avons suivi deux méthodes : dans la première Partie, nous faisons correspondre une congruence type (congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à une quadrique) à tout couple de surfaces applicables. Tous les couples qui correspondent à une même congruence ont les mêmes propriétés comme direction d'éléments. Dans la deuxième Partie, c'est une surface qui correspond à un couple de surfaces applicables, les lignes asymptotiques de la surface correspondant aux lignes conjuguées. Tous les couples qui correspondent à une même surface ont encore mêmes directions. Nous avons donné d'abord la propriété caractéristique de ces systèmes conjugués, puis étudié les cas où ils se projettent sur un plan suivant un système orthogonal, suivant un système de courbes également inclinées sur deux directions fixes; le cas où la projection de l'un des systèmes est formé de droites; puis le cas où ces courbes sont courbes de contact de cylindres circonscrits à la surface; enfin le cas où ces lignes se coupent sous un angle constant, etc.

[1] Ce Mémoire a obtenu la mention très honorable au concours du grand prix des Sciences mathématiques en 1894.

Nous avons fait usage de considérations sur l'espace à quatre dimensions. Nous appelons *surfaces* les variétés de points doublement indéterminés, *plan* les systèmes linéaires doublement infinis de points. La recherche des couples de surfaces applicables revient à celle des surfaces de l'espace à quatre dimensions qui sont applicables sur un plan. Ces surfaces jouissent de cette propriété caractéristique : c'est que leurs plans tangents sont normaux à une série de surfaces.

Nous avons dit quelques mots des théories qui se rattachent à la déformation. Nous avons montré que les systèmes conjugués qui se conservent dans la correspondance par orthogonalité des éléments sont à invariants égaux en coordonnées tangentielles.

Parmi les résultats obtenus, signalons les deux suivants :

1° Trouver tous les couples de surfaces applicables telles que la distance d d'un point de la première à un point fixe et la distance z du point correspondant de la seconde à un plan fixe soient liées par la relation

$$d^2 - z^2 = \text{const.};$$

nous montrons qu'on peut obtenir ces surfaces sous forme finie;

2° Trouver deux surfaces applicables, telles que les normales aux points correspondants forment un angle constant.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

I. — Indication des notations employées.

Je me place ici au point de vue de M. Cayley. Je prendrai pour quadrique fondamentale la sphère dont l'équation en coordonnées ordinaires est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Soit M un point, pris en dehors de cette sphère; on choisit le facteur de proportionnalité qui entre dans les quatre coordonnées, de telle sorte que la somme des carrés des quatre coordonnées soit égale à l'unité. Si x, y, z sont les coordonnées ordinaires du point M, x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées non euclidiennes, on aura

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}, \qquad x_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},$$
$$x_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}, \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}.$$

Si le point M décrit une courbe, la différentielle de l'arc de courbe sera donnée par

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Supposons en particulier que le point M décrive une droite D, prenons sur cette droite deux points conjugués

$$A(x_1 x_2 x_3 x_4), \quad B(y_1 y_2 y_3 y_4)$$

par rapport à la quadrique fondamentale. On aura d'abord

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0,$$

et les coordonnées du point $M(X_1 X_2 X_3 X_4)$ seront, en supprimant les indices,

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

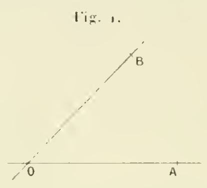
On trouve alors, en faisant varier φ,

$$ds = d\varphi.$$

La distance de deux points de la droite est égale à la différence des valeurs de φ qui y correspondent. La distance de deux points conjugués est toujours égale à $\frac{\pi}{2}$.

Angle de deux droites qui se coupent. — Soient A, B les points qui, sur les droites, sont les conjugués de leur point de rencontre O; l'angle des deux droites est par définition égal à la distance AB.

Fig. 1.



Dans un triangle ABC, il y a six éléments, trois angles et trois côtés; entre ces éléments existent les relations de la Trigonométrie sphérique; on en déduit :

Dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres;

Le plus court chemin d'un point à un autre est la droite qui joint ces deux points.

On appelle *normale* en un point d'un plan la droite qui joint ce point au pôle du plan. Cette droite est perpendiculaire à toutes celles qui passent par son pied dans le plan.

L'angle d'une droite et d'un plan est le complément de l'angle que fait cette droite avec la normale menée au point de rencontre de la droite et du plan.

Enfin, l'angle de deux plans est égal à la distance de leurs pôles.

La distance d'un point à un plan ou à une droite est la longueur de la perpendiculaire menée du point à la droite ou au plan.

La distance rectiligne de deux points

$$(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

est donnée par la formule

$$\cos\varphi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Il en résulte que le lieu des points (x) situés à une distance φ d'un

point (y) a pour équation

$$\cos^2\varphi(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2.$$

C'est une quadrique circonscrite à la quadrique fondamentale. Nous donnerons le nom de *sphère* à ces quadriques.

Remarque. — Aux quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4, on peut faire correspondre soit un point M de l'espace non euclidien, soit un point N' situé dans l'espace à quatre dimensions sur la sphère

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1.$$

Comme l'a remarqué M. Klein, on peut projeter stéréographiquement ce point N' dans l'espace à trois dimensions. On obtient ainsi un point N ayant pour coordonnées

$$X=\frac{2x_1}{1+x_4},\qquad Y=\frac{2x_2}{1+x_4},\qquad Z=\frac{2x_3}{1+x_4},$$

$$X^2+Y^2+Z^2=4\frac{1-x_4}{1+x_4}.$$

Appelons ds la différentielle de l'arc décrit par M, dS de celui décrit par N; on trouve

$$dS^2=4\frac{ds^2}{(1+x_4)^2}.$$

On voit facilement que l'angle de deux courbes qui se coupent en N est égal à l'angle non euclidien des courbes correspondantes qui se coupent en M.

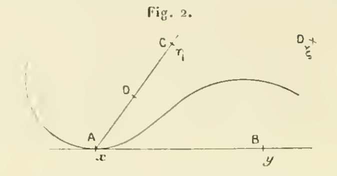
II. — Notions sur les courbes.

Je laisse de côté les cas particuliers où la courbe est une droite, où elle est située sur la quadrique fondamentale et enfin le cas où les tangentes à la courbe sont aussi tangentes à la quadrique fondamentale.

Soit $A(x_1x_2x_3x_4)$ un point de la courbe; sur la tangente en A, je prends le point $B(y_1y_2y_3y_4)$ conjugué de A; dans le plan osculateur,

je mène la normale AC à la tangente. Cette droite AC est la *normale principale* en A; le point $C(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ est le conjugué de A. Enfin, je désigne par $D(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ le pôle du plan osculateur. La droite AD

Fig. 2.



sera la *binormale* à la courbe. Choisissons comme variable indépendante l'arc de courbe décrit par le point A et remarquons que les éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à quatre dimensions; on en déduit les formules

$$\frac{dx}{ds} = y, \qquad \frac{dy}{ds} = -x - a\eta, \qquad \frac{d\eta}{ds} = ay - b\xi, \qquad \frac{d\xi}{ds} = b\eta,$$

où nous avons supprimé les indices; il y entre deux fonctions a et b de s; a est ce qu'on appelle la *courbure*, b la *torsion*. Si b est nul, le point D est fixe, la courbe est plane.

Le centre de courbure O est un point de la droite OC, dont les coordonnées sont

$$x \cos\varphi + \eta \sin\varphi.$$

La distance $AO = \varphi$ est donnée par l'équation

$$\cos\varphi + a \sin\varphi = 0.$$

On vérifie facilement que la caractéristique du plan normal ACD est la droite OD.

Soit maintenant $M(X_1 X_2 X_3 X_4)$ un point de la tangente. On pourra poser

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

On trouve en différentiant

$$dX = ds(y \cos \varphi - x \sin \varphi - a \sin \varphi \eta) + d\varphi(-x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

On voit que, si

$$d\varphi + ds = 0,$$

le point M décrit une courbe normale à AB; on tombe ainsi sur la théorie des *développantes*. On constituerait de même la théorie des *développées*. Comme dans la Géométrie ordinaire, les tangentes à deux développées forment un angle constant.

Enfin on trouve pour le dS^2 de la développable décrite par M

$$dS^2 = ds^2(1 + a^2 \sin^2 \varphi) + 2\,ds\,d\varphi + d\varphi^2;$$

b n'entre pas dans cette expression. On en conclut que les développables sont aussi applicables sur le plan quand on se place au point de vue non euclidien.

III. — Notions sur les surfaces.

Nous appellerons encore *géodésiques* les lignes les plus courtes qu'on peut tracer sur la surface. Ces géodésiques jouissent des mêmes propriétés que dans la Géométrie ordinaire : leur plan osculateur est normal à la surface; les tangentes à un système de géodésiques sont normales à une série de surfaces.

Les asymptotiques sont identiques dans les deux Géométries.

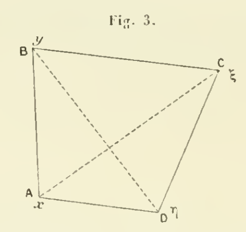
En un point d'une surface, on peut mener dans le plan tangent deux couples de droites : 1° les tangentes aux asymptotiques; 2° les tangentes à la quadrique fondamentale. Le faisceau qui divise harmoniquement ces deux couples est formé de tangentes conjuguées (sens de Dupin) rectangulaires (sens non euclidien). Ces droites sont tangentes à un système de courbes que nous appellerons *lignes de courbure*.

Nous développerons la théorie des lignes de courbure qui joue un rôle important dans la théorie de la déformation des surfaces.

IV. — Surfaces rapportées à leurs lignes de courbure.

Soit $A(x_1 x_2 x_3 x_4)$ un point d'une surface; sur les tangentes aux lignes de courbure prenons les points $C(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ et $D(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ qui sont conjugués de A. Soit en outre $B(y_1 y_2 y_3 y_4)$ le pôle du plan ACD; B décrit la surface polaire réciproque de la surface décrite par A. Soient u et v les paramètres de la surface (A) rapportée à ses lignes

Fig. 3.



de courbure; quand u varie seul, le point A décrit une courbe qui a pour tangente AC; la tangente à la courbe décrite par le point B sera BC, puisque cette droite est la polaire réciproque de AD qui est la conjuguée de AC (sens de Dupin). De même, quand v varie seul, les points A et B décrivent des courbes qui ont respectivement pour tangentes AD et BD; si l'on remarque de plus que les coordonnées des points A, B, C, D sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à quatre dimensions, on aura les formules suivantes, où nous supprimons les indices :

$$(\text{I}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = a\xi, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = b\eta, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = e\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = f\eta, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - ey - m\eta, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - fy - n\xi. \end{array} \right.$$

En égalant les dérivées secondes par rapport à u et v des coordonnées, on trouve que les quantités a, b, e, f, m, n doivent satisfaire aux relations

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, & \dfrac{\partial e}{\partial v} = fm, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, & \dfrac{\partial f}{\partial u} = en, \end{cases} \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial v} + ab + ef = 0.$$

La droite AB décrit une congruence rapportée à ses développables; les plans focaux de cette congruence sont les plans ABC, ABD; *ils sont conjugués,* par rapport à la quadrique fondamentale. De même, la droite CD décrit une congruence rapportée à ses développables; les foyers sont les points C et D; *ils sont conjugués* par rapport à la quadrique fondamentale. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les congruences jouissant de ces propriétés.

Prenons maintenant sur AB deux points $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$ et $N(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ conjugués. On pourra poser

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

On aura alors, si l'on tient compte des relations (1),

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = Y\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \xi(a\cos\varphi + e\sin\varphi), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} = -X\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \xi(-a\sin\varphi + e\cos\varphi), \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = Y\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \eta(b\cos\varphi + f\sin\varphi), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} = -X\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \eta(-b\sin\varphi + f\cos\varphi). \end{cases}$$

On voit d'abord que, si φ est constant, les points M et N décrivent des surfaces normales à AB. Ces surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbures; les tangentes de courbure en M sont MC et MD. Ces surfaces seront dites *parallèles* à la surface décrite par A.

Si l'on remplace les points A et B par les points M et N (φ con-

stant), les quantités m et n ne changent pas, mais a, b, e, f prennent les valeurs

$$a_1 = a\cos\varphi + e\sin\varphi, \qquad e_1 = -a\sin\varphi + e\cos\varphi,$$
$$b_1 = b\cos\varphi + f\sin\varphi, \qquad f_1 = -b\sin\varphi + f\cos\varphi.$$

On voit que l'on a

$$a_1^2 + e_1^2 = a^2 + e^2, \qquad b_1^2 + f_1^2 = b^2 + f^2,$$
$$a_1 f_1 - b_1 e_1 = af - be, \qquad a_1 b_1 + e_1 f_1 = ab + ef.$$

Ces quantités, qui ne changent pas quand on remplace la surface par une surface parallèle, ou, ce qui revient au même, ne dépendent que de la congruence décrite par AB, seront les *invariants* de cette congruence. Nous donnerons la signification géométrique de l'annulation des deux derniers.

Les formules (3) permettent de déterminer facilement les foyers de la congruence décrite par AB. Ces foyers C_1, C_2 sont appelés les *centres de courbure* de la surface (A). Les valeurs de φ qui y correspondent sont données par les formules : pour C_1,

$$a\cos\varphi + e\sin\varphi = 0;$$

pour C_2,

$$b\cos\varphi + f\sin\varphi = 0.$$

Les rayons de courbure φ_1 et φ_2 sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{a}{e}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{b}{f}.$$

Si $af - be = 0$, les deux rayons de courbure sont égaux ; les formules (11) montrent alors que

$$a\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \qquad \text{et} \qquad b\frac{\partial f}{\partial u} - f\frac{\partial b}{\partial u} = 0.$$

Les deux rapports égaux $\frac{a}{e}$, $\frac{f}{b}$ sont constants. Les formules (3) montrent alors que C_1 est fixe ; la surface (A) est une sphère.

Si $ab + ef = 0$, on a

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Les surfaces (A), qui correspondent à ce cas, surfaces que nous appellerons *surfaces* Σ, jouissent de propriétés spéciales au point de vue de la déformation. Elles sont étudiées en détail plus loin. Dans ce cas, la droite AB décrit une congruence dont les plans focaux et les foyers sont conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. Il en est de même de la congruence décrite par CD.

Cherchons maintenant les lignes asymptotiques de la surface (A). En différentiant les formules (1), on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= -x(b^2) - y\,bf - \xi\,bn + \eta\,\frac{\partial b}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \xi\,\frac{\partial a}{\partial v} + \eta\,\frac{\partial b}{\partial u},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= -x(a^2) - y\,ae + \xi\,\frac{\partial a}{\partial u} + \eta(-am),\end{aligned}\right.$$

On obtiendra l'équation différentielle des lignes asymptotiques en écrivant que, dans l'expression

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2,$$

le coefficient de y est nul, ce qui donne

$$ae\,du^2 + bf\,dv^2 = 0,$$

ou

$$\frac{du}{\sqrt{bf}} = \frac{dv}{\pm i\sqrt{ae}}.$$

Les points où les tangentes asymptotiques rencontrent CD ont leurs coordonnées proportionnelles aux quantités

$$\xi a\sqrt{bf} \pm i\eta\, b\sqrt{ae},$$

ou

$$\xi\sqrt{af} \pm i\eta\sqrt{be}.$$

Si les tangentes asymptotiques sont tangentes à la quadrique fondamentale, on a

$$af = be;$$

la surface est une sphère. Tous les systèmes conjugués sont orthogonaux.

Si ces tangentes sont conjuguées par rapport à la quadrique fondamentale, ou orthogonales, on aura

$$af + be = 0,$$

d'où

$$\tang\varphi_1 + \tang\varphi_2 = 0.$$

Ces rayons de courbure sont égaux et de signes contraires. Ce sont les *surfaces minima* non euclidiennes.

Cherchons dans quels cas les lignes asymptotiques se correspondent sur toutes les surfaces parallèles. On devra avoir, quel que soit φ,

$$\frac{a_1 e_1}{b_1 f_1} = \frac{ae}{bf},$$

ce qui donne, en effectuant,

$$(af - be)(ab + ef) = 0.$$

Le fait peut donc se produire, soit dans le cas des sphères, soit dans le cas des surfaces Σ.

L'équation différentielle des asymptotiques de la surface des centres décrite par C_1 est

$$\left(a\frac{\partial e}{\partial u} - e\frac{\partial a}{\partial u}\right)du^2 + \left(f\frac{\partial b}{\partial u} - b\frac{\partial f}{\partial u}\right)dv^2 = 0,$$

et, pour la surface C_2,

$$\left(a\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial a}{\partial v}\right)du^2 + \left(f\frac{\partial b}{\partial v} - b\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv^2 = 0.$$

Si les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la sur-

face des centres, $\frac{a}{e}$ est fonction de $\frac{b}{f}$. Les deux rayons de courbure de la surface (A) sont liés par une relation. Ces surfaces seront appelées les *surfaces non euclidiennes de M. Weingarten*.

V. — Projection stéréographique des lignes de courbure.

Des équations (1) du paragraphe précédent on déduit

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

et, de même,

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

L'équation (1) admet pour solutions

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

Cela posé, faisons la projection stéréographique indiquée dans la remarque du § I.

L'équation (1) admet évidemment les solutions

$$2x_1, \quad 2x_2, \quad 2x_3, \quad 1 - x_4, \quad 1 + x_4.$$

On en conclut que les quantités (§ I)

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad X^2 + Y^2 + Z^2, \quad 1$$

satisfont à une équation de Laplace. La projection stéréographique de la surface (A) est donc rapportée à ses lignes de courbure (sens ordinaire). Réciproquement, à toute surface rapportée à ses lignes de courbure on peut faire correspondre le système étudié dans le paragraphe précédent.

La transformation ponctuelle indiquée (§ I) transforme donc les lignes de courbure (sens ordinaire), en lignes de courbure non euclidiennes.

Le dS^2 de la projection stéréographique sera

$$dS^2 = \frac{4}{(1+x_4)^2}(a^2 du^2 + b^2 dv^2).$$

Si $a = \pm b$, on obtient une surface isotherme.

VI. — Sur un cas particulier de couples de surfaces applicables.

On voit que la recherche des couples de surfaces applicables revient à celle des surfaces de l'espace à quatre dimensions, qui sont applicables sur le plan. Cherchons parmi ces surfaces celles qui sont situées sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

On peut remplacer la surface cherchée par la surface correspondante de l'espace non euclidien et supposer cette dernière rapportée à ses lignes de courbure. Il faut exprimer alors que

$$a^2 du^2 + b^2 dv^2$$

est le ds^2 d'un plan; ce qui donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\right),$$

ou, en tenant compte des formules (2) (§ IV),

$$(1) \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0, \qquad ab + ef = 0,$$

on tombe sur les surfaces Σ, que nous allons déterminer. La seconde des relations (1) permet de poser

$$a = \rho \cos\varphi, \qquad e = \rho \sin\varphi,$$
$$b = r \sin\varphi, \qquad f = -r \cos\varphi.$$

Les relations (2) (§ IV) donnent ensuite

$$\cos\varphi\,\frac{\partial\rho}{\partial v}-\rho\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=mr\sin\varphi,\qquad \sin\varphi\,\frac{\partial r}{\partial u}+r\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=n\rho\cos\varphi,$$
$$\sin\varphi\,\frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-mr\cos\varphi,\qquad -\cos\varphi\,\frac{\partial r}{\partial u}+r\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=n\rho\sin\varphi.$$

On en déduit

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial u}=0.$$

On peut, en choisissant convenablement les variables u et v, supposer

$$\rho=1,\qquad r=1.$$

On trouve ensuite

$$m=-\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad n=\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

d'où la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{dv^2}-\frac{d^2\varphi}{du^2}=0,$$

ce qui donne

$$\varphi=F(u+v)+F_1(u-v),$$

F et F_1 étant deux fonctions arbitraires.

Les formules (1) (§ IV) deviennent

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial x}{\partial u}=\cos\varphi\,\xi, & \dfrac{\partial x}{\partial v}=\sin\varphi\,\eta,\\[2mm]
\dfrac{\partial y}{\partial u}=\sin\varphi\,\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial v}=-\cos\varphi\,\eta,\\[2mm]
\dfrac{\partial \xi}{\partial u}=-\cos\varphi\,x-\sin\varphi\,y+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\eta, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\eta,\\[2mm]
\dfrac{\partial \eta}{\partial u}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\xi, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}=-x\sin\varphi+y\cos\varphi-\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\xi.
\end{array}\right.$$

Pour achever la détermination de ces surfaces, il faudrait intégrer le système (2); mais nous les obtiendrons plus loin, sous forme finie, par une autre méthode (§ X).

Les lignes asymptotiques de la surface (A) sont

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

On trouve aussi la même équation pour celles des surfaces des centres. Toutes les surfaces parallèles à (A) jouissent de la même propriété. Nous verrons plus loin qu'il en est de même des surfaces des centres. Nous étudierons, dans le paragraphe suivant, les principales propriétés des surfaces Σ; nous allons indiquer ici les formules qui donnent les deux surfaces applicables.

La première surface a pour coordonnées

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3;$$

la deuxième,

$$+ix_4, \quad X, \quad Y;$$

X et Y sont données à l'aide de quadratures

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \cos\theta \cos\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = \sin\theta \cos\varphi,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \sin\theta \sin\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\cos\theta \sin\varphi,$$

où

$$\varphi = F(u+v) + F_1(u-v), \qquad \theta = -F(u+v) + F_1(u-v).$$

Ces deux couples de surfaces jouissent des propriétés suivantes :

1° *Le carré de la distance d'un point fixe* O *à un point quelconque* M *de la première surface est égal au carré de la distance du point correspondant* M' *de la seconde à un plan fixe* π, *augmenté de l'unité* (ou d'une constante, ce qui revient au même en prenant des surfaces homothétiques).

Nous obtenons ainsi tous les couples de surfaces applicables jouissant de cette propriété.

2° *Ces surfaces sont rapportées à leur système conjugué com-*

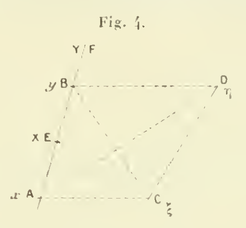
mun; le système conjugué de la deuxième surface se projette sur le plan π suivant un système orthogonal.

Cette deuxième propriété appartient aussi à d'autres couples de surfaces applicables, ainsi que nous le verrons plus loin.

VII. — Sur quelques propriétés des surfaces Σ.

Conservons le tétraèdre ABCD, mais prenons pour variables indé-

Fig. 4.



pendantes u, v les paramètres des lignes asymptotiques de la surface A. Les formules du paragraphe précédent deviennent

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -x\cos\varphi - y\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\xi;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -x\cos\varphi - y\sin\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\xi,$$

avec la seule condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi = F(u) + F_1(v).$$

Les centres de courbure $E(X_1 X_2 X_3 X_4)$, $F(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ de la surface A ont pour coordonnées

$$X = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

On obtient des formules plus symétriques en introduisant le tétraèdre EFCD, c'est-à-dire les foyers des congruences (AB) et (CD). On obtient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial u} = Y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \xi, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -X\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \eta_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -X + \eta_1\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \quad Y - \xi\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ &\frac{\partial X}{\partial v} = Y\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \xi, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = -X\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \eta_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -X - \eta_1\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -Y + \xi\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, on vérifie facilement que les quatre surfaces (E), (F), (C), (D) sont rapportées à leurs asymptotiques. En effet, pour la surface E, on trouve

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = Y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - X\left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right],$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ est un point du plan tangent, et par suite que les courbes u variables sont des asymptotiques. Si de plus $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ est nul, $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ est proportionnel à X, ces courbes sont des droites. Les quatre surfaces E, F, C, D sont des surfaces réglées.

Nous allons montrer, en outre, que ces surfaces sont des surfaces Σ. Cherchons les centres de courbure de la surface E, c'est-à-dire les foyers de la congruence ED. Un point M $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ de la droite ED a pour coordonnées

$$x = X\cos\theta + \eta_1 \sin\theta.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial u}(-X\sin\theta + \eta_1\cos\theta) + Y\left(\cos\theta\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \sin\theta\right) + \xi\left(\cos\theta - \sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v}(-X\sin\theta + \eta_1\cos\theta) + Y\left(\cos\theta\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \sin\theta\right) + \xi\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right).$$

Les valeurs de θ correspondant aux foyers sont donnés

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \sin\theta, & \cos\theta - \sin\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \cos\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \sin\theta, & \cos\theta + \sin\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(2)\quad \cos^2\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+1\right)-\sin^2\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=0,$$

ce qui montre que ces foyers sont conjugués par rapport à la quadrique fondamentale et que (E) est une surface Σ.

On obtiendra donc un tétraèdre analogue au tétraèdre EFCD, en prenant les foyers des deux droites ED, CF. La fonction φ est remplacée par la fonction θ donnée par l'équation (2). Pour trouver la valeur de θ, posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\operatorname{tang}\alpha,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=\operatorname{tang}\beta,$$

α est fonction de u seul, β de v seul; l'équation (2) donne ensuite

$$\operatorname{tang}(\alpha-\beta)+\operatorname{tang}2\theta=0,$$

d'où

$$\theta=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

On voit que d'une surface Σ on peut en déduire une infinité d'autres.

On vérifierait aussi facilement que la droite EC est normale à une série de surfaces, comme les foyers de cette droite, qui sont E et C, sont conjugués; cette série est formée de surfaces Σ.

Tous ces résultats pouvaient être prévus de la façon suivante. Considérons une surface dans l'espace non euclidien, rapportée à un système de géodésiques et à ses trajectoires orthogonales. Le ds^2 est de la forme

$$ds^2=du^2+a^2\,dv^2.$$

Les tangentes aux courbes $v=$ const. sont normales à une série de surfaces; la distance φ des deux centres de courbure est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{a}{\dfrac{\partial a}{\partial u}}.$$

Si la série est formée de surfaces Σ, on aura

$$\frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad a = 1.$$

La surface des centres est elle-même applicable sur un plan. Les géodésiques $v =$ const. correspondent à une série de droites parallèles du plan. Les courbes $u =$ const. correspondent à la série de droites rectangulaires, c'est ce qui explique que les droites EC sont normales à un système de surfaces Σ.

VIII. — Surfaces minima non euclidiennes.

On doit avoir dans ce cas (§ IV)

$$af + be = 0.$$

On peut donc poser

$$e = a\rho, \qquad f = -b\rho.$$

Les formules du § IV donnent ensuite

$$\rho\frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial v} = -\rho bm = -\rho\frac{\partial a}{\partial v},$$

$$-b\frac{\partial \rho}{\partial u} - \rho\frac{\partial b}{\partial u} = an\rho \qquad = \rho\frac{\partial b}{\partial u},$$

ou

$$2\rho\frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(a^2\rho) = 0,$$

$$2\rho\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}(b^2\rho) = 0.$$

On peut poser

$$a^2\rho = 1, \qquad b^2\rho = 1.$$

Prenons comme inconnue φ, en faisant

$$\rho = e^{-2\varphi},$$

on trouve alors

$$a = e^{\varphi}, \qquad e = e^{-\varphi},$$
$$b = e^{\varphi}, \qquad f = -e^{-\varphi},$$

puis ensuite

$$m = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

On arrive enfin à la condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.$$

Cette équation intervient dans la recherche des surfaces à courbure totale constante. M. Darboux a déjà indiqué que la recherche de ces deux groupes de surfaces est identique.

On a donc pour ces surfaces les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{\varphi}\eta_1, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = e^{-\varphi}\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -e^{-\varphi}\eta_1, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{\varphi}x - e^{-\varphi}y - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\eta_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\eta_1, \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\xi, & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial v} = -e^{\varphi}x + e^{-\varphi}y - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\xi, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0. \end{cases}$$

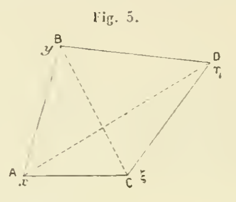
On peut remarquer que les projections stéréographiques des surfaces (A) et (B) sont des surfaces isothermiques.

Il nous sera utile, dans la suite, d'avoir ces mêmes surfaces rapportées à leurs asymptotiques; soient toujours A(x) et B(y) les points correspondants des deux surfaces, par C(ξ) et D(η_1) les points où les tangentes asymptotiques coupent la polaire réciproque de AB.

Quand u varie seul, le point A décrit une ligne asymptotique dont la tangente est AC, le point B décrit une asymptotique, dont la tan-

gente est la polaire réciproque BD; de même, quand v varie seul, les tangentes aux courbes décrites par A et B sont AD et AC. On doit

Fig. 5.



donc avoir des formules de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = e\eta_1, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - m\eta_1, \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = -ey + m\xi,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = by, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = f\xi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -fy + n\eta_1, \qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial v} = -bx - n\xi.$$

En écrivant que ces formules sont compatibles, on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = -fm$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} = an, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = -en$$

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab - ef = 0$$

$$af = be.$$

On peut poser

$$e = a\rho, \qquad f = b\rho.$$

Les premières relations donnent ensuite

$$\frac{\partial}{\partial v}(a^2\rho) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}(b^2\rho) = 0.$$

On peut prendre

$$a^2\rho = 1, \qquad b^2\rho = 1.$$

Faisons $\rho = e^{-2\varphi}$, on trouve

$$a = e^{\varphi}, \qquad b = e^{\varphi},$$

$$e = e^{-\varphi}, \qquad f = e^{-\varphi},$$

puis

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

avec la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.$$

On a alors le Tableau de formules

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = e^{-\varphi}\eta, & \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = -e^{\varphi}x - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\eta, & \dfrac{\partial\eta}{\partial u} = -e^{-\varphi}y + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\xi, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{\varphi}\eta, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = e^{-\varphi}\xi, & \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = -e^{-\varphi}y + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\eta, & \dfrac{\partial\eta}{\partial v} = -e^{\varphi}x - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\xi. \\ & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0. & & \end{array} \right.$$

IX. — Les coordonnées de la ligne droite.

Soit une droite D; prenons sur cette droite deux points A $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ et B $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. Nous prendrons comme coordonnées plukériennes de D six quantités, dont les trois premières sont proportionnelles aux projections (sens ordinaire) de AB sur les trois axes de coordonnées; les trois secondes proportionnelles aux projections du moment de AB par rapport à l'origine. (Dans la suite, nous écrirons toujours en première ligne les premières coordonnées d'une droite, ensuite les secondes coordonnées.) Nous fixons le facteur de proportionnalité, *au signe près*, en écrivant les coordonnées de D ainsi

$$\begin{array}{ll} X = x_1 y_4 - y_1 x_4, & L = x_2 y_3 - y_2 x_3, \\ Y = x_2 y_4 - y_2 x_4, & M = x_3 y_1 - y_3 x_1, \\ Z = x_3 y_4 - y_3 x_4, & N = x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{array}$$

Quand on déplace les points A et B sur D, les quantités X, Y, Z, L, M, N restent fixes au signe près. Ces quantités vérifient, outre la relation

$$LX + MY + NZ = 0,$$

qui existe entre les coordonnées d'une droite, la relation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1,$$

ou

$$(X \pm L)^2 + (Y \pm M)^2 + (Z \pm N)^2 = 1,$$

qui tient au choix du facteur de proportionnalité. Dans la dernière relation, il faut faire correspondre les signes.

Cela posé, soit $A(x)$, $B(y)$, $C(\xi)$, $D(\eta)$ un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique fondamentale, choisissons les signes des coordonnées de telle sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

soit égal à $+1$. On sait que, dans ce cas, chaque élément est égal à son coefficient dans le déterminant; de même, chaque mineur à deux éléments est égal au mineur qui le multiplie dans l'expression du déterminant. Il en résulte que, pour passer des coordonnées d'une arête à celle de ses polaires réciproques, il suffit d'échanger les premières et les secondes coordonnées.

Les coordonnées des six arêtes du tétraèdre ABCD sont alors

$$AB \begin{cases} L = x_1 y_4 - y_1 x_4, & X = x_2 y_3 - y_2 x_3, \\ M = x_2 y_4 - y_2 x_4, & Y = x_3 y_1 - y_3 x_1, \\ N = x_3 y_4 - y_3 x_4, & Z = x_1 y_2 - y_1 x_2, \end{cases}$$

$$AC \begin{cases} L_1 = x_1 \xi_4 - \xi_1 x_4, & X_1 = x_2 \xi_3 - \xi_2 x_3, \\ M_1 = x_2 \xi_4 - \xi_2 x_4, & Y_1 = x_3 \xi_1 - \xi_3 x_1, \\ N_1 = x_3 \xi_4 - \xi_3 x_4, & Z_1 = x_1 \xi_2 - \xi_1 x_2, \end{cases}$$

$$AD \begin{cases} L_2 = x_1 \eta_4 - \eta_1 x_4, & X_2 = x_2 y_3 - x_3 \eta_2, \\ M_2 = x_2 \eta_4 - \eta_2 x_4, & Y_2 = x_3 \eta_1 - x_1 \eta_3, \\ N_2 = x_3 \eta_4 - \eta_3 x_4, & Z_2 = x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1, \end{cases}$$

$$\text{CD}\begin{cases} X = \xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4, & L = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \\ Y = \xi_2\eta_4 - \eta_2\xi_4, & M = \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3, \\ Z = \xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4, & N = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1, \end{cases}$$

$$\text{DB}\begin{cases} X_1 = \eta_4 y_1 - y_4\eta_1, & L_1 = \eta_2 y_3 - y_2\eta_3, \\ Y_1 = \eta_4 y_2 - y_4\eta_2, & M_1 = \eta_3 y_1 - y_3\eta_1, \\ Z_1 = \eta_4 y_3 - y_4\eta_3, & N_1 = \eta_1 y_2 - y_1\eta_2, \end{cases}$$

$$\text{BC}\begin{cases} X_2 = y_1\xi_4 - \xi_1 y_4, & L_2 = y_2\xi_3 - \xi_2 y_3, \\ Y_2 = y_2\xi_4 - \xi_2 y_4, & M_2 = y_3\xi_1 - \xi_3 y_1, \\ Z_2 = y_3\xi_4 - \xi_3 y_4, & N_2 = y_1\xi_2 - \xi_1 y_2. \end{cases}$$

En écrivant que AB rencontre AC et DB, on a

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 + XL_1 + YM_1 + ZN_1 = 0,$$
$$LL_1 + MM_1 + NN_1 + XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0,$$

d'où

$$(L \pm X)(L_1 \pm X_1) + (M \pm Y)(M_1 \pm Y_1) + (N \pm Z)(N_1 \pm Z_1) = 0.$$

On en conclut que les quantités

$$\begin{matrix} X \pm L, & Y \pm M, & Z \pm N, \\ X_1 \pm L_1, & Y_1 \pm M_1, & Z_1 \pm N_1, \\ X_2 \pm L_2, & Y_2 \pm M_2, & Z_2 \pm N_2, \end{matrix}$$

où les signes se correspondent, sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à trois dimensions.

Il y a beaucoup de relations entre ces quantités; nous signalerons seulement celles qui nous seront utiles. On a d'abord

$$YZ_1 - ZY_1 = \eta_4[y_4(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) - \eta_4(\xi_2 y_3 - \xi_3 y_2) + \xi_4(\eta_2 y_3 - \eta_3 y_2)] = \eta_4 x_1,$$

en remarquant que x_1 est égal au déterminant

$$x_1 = \begin{vmatrix} y_3 & y_3 & y_4 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_3 & \eta_3 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

On a donc les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} YZ_1 - ZY_1 &= \eta_4 x_1,\\ ZX_1 - XZ_1 &= \eta_4 x_2,\\ XY_1 - YX_1 &= \eta_4 x_3,\\ LX_1 + MY_1 + NZ_1 &= \eta_4 x_4. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont les coordonnées homogènes de A ; on aurait encore ces coordonnées en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2 : le facteur de proportionnalité serait ξ_4 au lieu de η_4.

Nous donnerons, en outre, la valeur des déterminants à trois éléments que l'on peut former avec les coordonnées des droites. (Nous n'écrivons que la première colonne de chaque déterminant, les deux autres s'en déduisent en remplaçant X et L soit par Y et M, soit par Z et N et en mettant les mêmes indices.) Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} L \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_4^2, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_4 \xi_4, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_4 \eta_4,\\ \begin{vmatrix} L \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_4 y_4, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_4^2, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_4 \eta_4,\\ \begin{vmatrix} L \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = y_4 \eta_4, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = \xi_4 \eta_4, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = \eta_4^2. \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \end{vmatrix} = x_4^2,$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \begin{vmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \end{vmatrix} = x_4 \eta_4, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \end{vmatrix} = -x_4 \xi_4, \\ \begin{vmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L} \end{vmatrix} = -x_4 \eta_4, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L} \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L} \end{vmatrix} = x_4 y_4, \\ \begin{vmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{L}_1 \end{vmatrix} = x_4 \xi_4, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{L}_1 \end{vmatrix} = -x_4 y_4, & \begin{vmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{L}_1 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

X. — Détermination des surfaces Σ.

Appliquons les formules du paragraphe précédent en prenant comme tétraèdre conjugué le tétraèdre E, F, C, D (§ VII). En tenant compte des formules (I, § VII), on trouve

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = -\mathrm{X}_2 - \mathrm{L}_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u} = -\mathrm{L}_2 - \mathrm{X}_2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = \mathrm{X}_2 - \mathrm{L}_2, \qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v} = \mathrm{L}_2 - \mathrm{X}_2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathrm{L}_2 + \mathrm{X}_2), \qquad \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathrm{X}_2 + \mathrm{L}_2),$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(-\mathrm{X}_2 + \mathrm{L}_2), \qquad \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(-\mathrm{L}_2 + \mathrm{X}_2),$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \mathrm{X} + \mathrm{L} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{L}_1), \qquad \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial u} = \mathrm{L} + \mathrm{X} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathrm{L}_1 + \mathrm{X}_1),$$

$$\frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial v} = -\mathrm{X} + \mathrm{L} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathrm{X}_1 - \mathrm{L}_1), \qquad \frac{\partial \mathrm{L}_2}{\partial v} = -\mathrm{L} + \mathrm{X} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathrm{L}_1 - \mathrm{X}_1)$$

avec les formules analogues obtenues en remplaçant X et L soit par Y et M, soit par Z et N. On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial u}(X + L) = -2(X_2 + L_2), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X - L) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X + L) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X - L) = 2(X_2 - L_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(X_1 + L_1) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(X_2 + L_2), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X_1 - L_1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X_1 + L_1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X_1 - L_1) = -2\frac{\partial\varphi}{\partial v}(X_2 - L_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(X_2 + L_2) = 2(X + L) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(L_1 + X_1), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X_2 - L_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X_2 + L_2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X_2 - L_2) = -2(X - L) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial v}(X_1 - L_1).$$

On en conclut que les quantités

$$X + L, \quad Y + M, \quad Z + N,$$
$$X_1 + L_1, \quad Y_1 + M_1, \quad Z_1 + N_1,$$
$$X_2 + L_2, \quad Y_2 + M_2, \quad Z_2 + N_2$$

ne dépendent que de u, et comme ces quantités sont les coefficients d'une substitution orthogonale, on obtient leurs valeurs ainsi : Soient α, β, γ les coordonnées d'un point m, d'une courbe c tracée sur la sphère de rayon 1 : α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de la tangente en m à la courbe c; α_2, β_2, γ_2 ceux de la normale au cône qui a pour sommet l'origine et pour base la courbe c. On aura

$$X + L = \alpha, \qquad Y + M = \beta, \qquad Z + N = \gamma,$$
$$X_1 + L_1 = \alpha_2, \qquad Y_1 + M_1 = \beta_2, \qquad Z_1 + N_1 = \gamma_2,$$
$$X_2 + L_2 = \alpha_1, \qquad Y_2 + M_2 = \beta_1, \qquad Z_2 + N_2 = \gamma_1,$$

et pour l'arc de courbe décrit par m, on trouve

$$ds = 2\,du,$$

ce qui fixe le sens de la variable u; enfin on voit que la courbure géodésique de c est $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$.

De même, en traçant sur la sphère de rayon 1 une courbe c', tel que

$$ds' = 2dv,$$

et dont la courbure géodésique est $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, on aura

$$\begin{aligned}
X - L &= \alpha', & Y - M &= \beta', & Z - N &= \gamma', \\
X_1 - L_1 &= \alpha'_2, & Y_1 - M_1 &= \beta'_2, & Z_1 - N_1 &= \gamma'_2, \\
X_2 - L_2 &= \alpha'_1, & Y_2 - M_2 &= \beta'_1, & Z_2 - N_2 &= \gamma'_1.
\end{aligned}$$

On a donc déjà les coordonnées des six arêtes du tétraèdre EFCD. En appliquant les formules (1) (§ IX), on obtiendra des quantités proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 du point E. On trouve

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= (\beta + \beta')(\gamma_1 + \gamma'_1) - (\gamma + \gamma')(\beta_1 + \beta'_1), \\
\lambda x_2 &= (\gamma + \gamma')(\alpha_1 + \alpha'_1) - (\alpha + \alpha')(\gamma_1 + \gamma'_1), \\
\lambda x_3 &= (\alpha + \alpha')(\beta_1 + \beta'_1) - (\beta + \beta')(\alpha_1 + \alpha'_1), \\
\lambda x_4 &= (\alpha - \alpha')(\alpha_1 + \alpha'_1) + (\beta - \beta')(\beta_1 + \beta'_1) + (\gamma - \gamma')(\gamma_1 + \gamma'_1).
\end{aligned}$$

On en déduit facilement λ, et ensuite x_1, x_2, x_3, x_4. Il est facile de former les deux surfaces applicables. Les formules (1) (§ VIII) donnent, pour le ds^2 du point E,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\
&= \left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) du\,dv + \left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 \\
&= [d(u+v)]^2 + d\varphi^2.
\end{aligned}$$

Les coordonnées des deux surfaces applicables sont :

Pour la première,

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3;$$

Pour la seconde,

$$ix_4, \quad u+v, \quad \varphi.$$

Remarque. — Si la courbe c, par exemple, est un petit cercle, Σ est une surface réglée, car alors $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ est constant.

La première surface (x_1, x_2, x_3) sera, en général, un lieu de coniques ayant leur centre à l'origine.

XI. — Sur certains couples de surfaces applicables.

Nous avons déterminé (§ VIII et X) les courbes de surfaces applicables $S_1(x, y, z)$, $S_2(x', y', z')$ tels que

$$x^2+y^2+z^2-x'^2=1.$$

On peut, par une homographie, remplacer l'unité par une constante quelconque différente de zéro.

Nous allons étudier directement le cas où le second membre est nul; la solution, que nous rattachons à la théorie des surfaces minima, sera présentée sous forme synthétique. On verrait facilement que la relation donnée est la plus générale.

La recherche d'une surface minima, rapportée à ses asymptotiques, revient à trouver quatre solutions d'une équation de M. Moutard,

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\theta,$$

liées par la relation

$$(2) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\rho^2=0.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\eta\dfrac{\partial\eta}{\partial u}+\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial u}=0, \\ \xi\dfrac{\partial\xi}{\partial v}+\eta\dfrac{\partial\eta}{\partial v}+\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial v}=0. \end{cases}$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à v et en

tenant compte de 1 et 2, on trouve

$$(4)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0.$$

Posons maintenant

$$E=\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2.$$

En tenant compte de 1 et 3, on trouve

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

En choisissant convenablement les variables u et v on peut poser

$$E=1,\qquad G=1.$$

Il en résulte que l'on a

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=d\rho^2+du^2+dv^2.$$

Les coordonnées des points correspondants des surfaces applicables :

Pour la première,

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta.$$

Pour la seconde,

$$\rho,\quad u,\quad v.$$

Ce couple jouit de la propriété suivante :

La distance d'un point de la première surface à un point fixe est égale à la distance du point correspondant de la seconde à un plan fixe.

On peut, d'ailleurs, rattacher ce cas particulier à la recherche des

surfaces Σ. Prenons une surface Σ rapportée à ses lignes de courbure; l'un des points M, où CD rencontre la quadrique fondamentale, a pour coordonnées,

$$X_1 = \xi_1 + i\eta_{i1}, \quad X_2 = \xi_2 + i\eta_{i2}, \quad X_3 = \xi_3 + i\eta_{i3}, \quad X_4 = \xi_4 + i\eta_{i4},$$

on a bien

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0.$$

Les formules (1) (§ VI) donnent ensuite

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -(x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial v}(\eta_i - i\xi_i),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = i(-x\sin\varphi_i + y\cos\varphi_i) + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u}(\eta_i - i\xi_i).$$

En faisant la somme des carrés et ajoutant, on trouve

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 = du^2 - dv^2.$$

Les deux surfaces cherchées ont pour coordonnées :

La première,

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3.$$

La seconde,

$$iX_4, \quad u, \quad iv.$$

XII. — Les surfaces qui ont des lignes de courbure dans l'espace à quatre dimensions.

Soit $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un point d'une surface dans l'espace à quatre dimensions. En laissant de côté le cas où il existe une relation linéaire entre X_1, X_2, X_3, X_4, on sait que ces quantités vérifient une seule équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + 2D\frac{\partial\theta}{\partial u} + 2E\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

Les caractéristiques de cette équation définissent ce qu'on appelle

le *système conjugué* tracé sur la surface. Si la surface est rapportée à son système conjugué les quatre coordonnées vérifient une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Si, de plus, ce système conjugué est formé de courbes qui se coupent à angles droits, nous dirons que la surface admet des *lignes de courbure*. Dans ce cas, l'équation (1) admet, en outre, la solution

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2,$$

et réciproquement.

Voici comment on peut obtenir de telles surfaces. Reprenons les équations du § IV et posons

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = h\xi, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial v} = l\eta. \end{cases}$$

Écrivons que ces équations sont compatibles, on trouve

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = lm, \\[2mm] \dfrac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

Les quatre coordonnées X vérifient en outre l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

La surface M est donc rapportée à un système conjugué, et les formules (2) montrent que ce système est orthogonal. Nous dirons que la surface A ou B (§ IV) est la représentation sphérique de la surface M. Pour obtenir toutes les surfaces qui ont une représentation sphérique donnée, il suffit d'intégrer les équations (3).

Réciproquement, sauf un cas d'exception que nous signalons plus loin, on obtient ainsi toutes les surfaces qui ont des lignes de cour-

bure. Soit (M) une surface rapportée à ses lignes de courbure, désignons par $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe de paramètre v; par $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, ceux de la tangente à la courbe de paramètre u; prenons en outre deux directions perpendiculaires entre elles et perpendiculaires aux tangentes. Soient (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) et (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) les cosinus de ces deux directions.

En vertu des hypothèses faites, on peut déjà écrire les équations (2). Cela posé, le système étant conjugué, $\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v}$ doit être linéaire et homogène en ξ et η, c'est-à-dire que $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ ne peut contenir que η, $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ que ξ. Il en résulte que $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial y'}{\partial u}$ ne contiennent pas η, que $\frac{\partial x'}{\partial v}$, $\frac{\partial y'}{\partial v}$ ne contiennent pas ξ. On doit donc avoir un Tableau de la forme

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = a\xi + p y', \qquad \frac{\partial y'}{\partial u} = e\xi - p x',$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = b\eta + q y', \qquad \frac{\partial y'}{\partial v} = f\eta - q x',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -a x' + e y' - m\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -b x' - f y' - n\xi.$$

En écrivant que ces formules sont compatibles, on trouve entre autres formules la suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}. \tag{4}$$

Si l'on pose alors

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,$$
$$y = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

les dérivées de x ne contiendront pas y (et, par suite, celles de y ne contiennent pas x) si l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -p, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -q.$$

qui sont compatibles en vertu de (4). On retombe alors sur les formules (1) (§ IV).

Cas d'exception. — La démonstration qui précède suppose que les lignes de courbure ne sont pas des lignes de longueur nulle. Il existe des surfaces qui admettent des lignes de courbure dont l'un des systèmes est formé de lignes de longueur nulle. Nous laissons de côté pour le moment ce cas particulier.

On peut, au lieu d'intégrer le système (3), suivre la marche suivante pour trouver les surfaces qui ont une représentation sphérique donnée. Posons

$$X = px + qy + \alpha\xi + \beta\eta.$$

On trouve

$$\frac{\partial X}{\partial u} = x\left(\frac{\partial p}{\partial u} - a\alpha\right) + y\left(\frac{\partial q}{\partial u} - e\alpha\right) + \xi\left(ap + eq + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + m\beta\right) + \eta\left(-m\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = x\left(\frac{\partial p}{\partial v} - b\beta\right) + y\left(\frac{\partial q}{\partial v} - f\beta\right) + \xi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - n\beta\right) + \eta\left(bp + fg + n\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial v}\right).$$

En identifiant avec les formules (2), on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial p}{\partial u} - a\alpha = 0, & \dfrac{\partial q}{\partial u} - e\alpha = 0, & \dfrac{\partial \beta}{\partial u} - m\alpha = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} - b\beta = 0, & \dfrac{\partial q}{\partial v} - f\beta = 0, & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} - n\beta = 0, \end{array}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} h = ap + eq + m\beta + \dfrac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ l = bp + fq + n\alpha + \dfrac{\partial \beta}{\partial v}. \end{array}\right.$$

De (5) on tire

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = \alpha \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \alpha \frac{\partial a}{\partial v} + an\beta = \alpha \frac{\partial a}{\partial v} + \beta \frac{\partial b}{\partial u},$$

ou

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Si p est une relation de cette équation, α et β seront connus par les

deux premières formules (5), q sera ensuite donné par une quadrature. On obtient ainsi une surface (M).

Remarque. — L'équation (7) est celle à laquelle satisfont x_1, x_2, x_3, x_4. Cette équation s'intègre en même temps que celle que vérifient les coordonnées X, Y, Z de la projection stéréographique de la surface (A) (§ V). On en conclut que la recherche d'une surface (M) est équivalente à la recherche de deux surfaces qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. Ce fait sera expliqué plus loin.

Remarque. — Si la représentation sphérique est une sphère, la surface M est située sur un hyperplan.

En effet, nous savons que, dans ce cas, la droite AB (§ IV) passe par un point fixe. Soient (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées de ce point, on aura

$$z_1\frac{\partial X_1}{\partial u}+z_2\frac{\partial X_2}{\partial u}+z_3\frac{\partial X_3}{\partial u}+z_4\frac{\partial X_4}{\partial u}=0,$$

$$z_1\frac{\partial X_1}{\partial v}+z_2\frac{\partial X_2}{\partial v}+z_3\frac{\partial X_3}{\partial v}+z_4\frac{\partial X_4}{\partial v}=0,$$

d'où

$$z_1X_1+z_2X_2+z_3X_3+z_4X_4=\text{const.}$$

XIII. — Étude du cas d'exception.

Dans ce cas, on doit avoir

$$dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2+dX_4^2=H^2\,dv^2.$$

Si l'on considère dans l'espace ordinaire la surface (S) qui a pour coordonnées X_1, X_2, X_3, les courbes $v=\text{const.}$ seront des géodésiques. Réciproquement, supposons la surface S rapportée à un système de géodésiques et à ses trajectoires orthogonales; on aura

$$dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2=du^2+G^2\,dv^2;$$

posons $X_4=-iu$.

Si nous formons l'équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+2B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+2D\frac{\partial\theta}{\partial u}+2E\frac{\partial\theta}{\partial v}=0,$$

à laquelle satisfont X_1, X_2, X_3, X_4, on trouve que D et C sont nuls. On vérifie facilement que

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$$

est solution de l'équation qui reste. On obtient ainsi toutes les surfaces cherchées. Les lignes de courbure de ces surfaces (M) correspondent : les lignes de longueur nulle aux géodésiques de S ; les autres aux trajectoires conjuguées de ces géodésiques. A cette surface (M) on peut faire correspondre une seconde surface (M_1) qui correspond à la seconde nappe S_1 de la congruence formée par les tangentes aux asymptotiques de S.

Le plan tangent à M_1 est normal au plan tangent à M et réciproquement. La surface M jouit donc des deux propriétés suivantes :

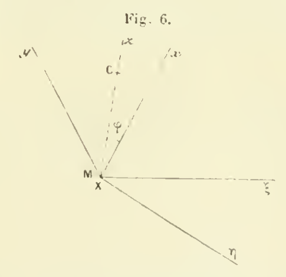
1° Son plan normal enveloppe une surface ;

2° Son plan tangent est normal à une surface.

XIV. — Propriété caractéristique des surfaces qui ont des lignes de courbure.

Reprenons la surface (M) rapportée à ses lignes de courbure ; le

Fig. 6.



plan $M\xi\eta$ est le plan tangent, le plan Mxy le plan normal. Menons une normale Mz faisant un angle constant φ avec Mx ; un point

$C(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$ pris sur cette normale a pour coordonnées

$$Y = X + \rho(x \cos\varphi + y \sin\varphi),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \xi[h + \rho(a\cos\varphi + e\sin\varphi)] + \frac{\partial\rho}{\partial u}(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \eta[l + \rho(b\cos\varphi + f\sin\varphi)] + \frac{\partial\rho}{\partial v}(x\cos\varphi + y\sin\varphi).$$

On en déduit que la droite Mz est tangente à deux surfaces, aux points C_1 et C_2 définis,

$$C_1 \qquad h + \rho_1(a\cos\varphi + e\sin\varphi),$$

$$C_2 \qquad l + \rho_2(b\cos\varphi + f\sin\varphi).$$

C_1 et C_2 sont les centres de courbure; quand φ varie, C_1 et C_2 décrivent des droites D_1, D_2, qui ont pour équation

$$D_1 \qquad h + ax + ey = 0,$$

$$D_2 \qquad l + bx + fy = 0.$$

Dans le cas où la représentation sphérique de (M) est une sphère, ces droites sont parallèles. Dans tous les autres cas, elles se coupent en un point N. Nous allons montrer que le point N décrit une surface tangente au plan xy.

Un point quelconque $N(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$ du plan de xy a des coordonnées de la forme

$$Z = X + \rho x + ry,$$

d'où

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \xi(h + a\rho + er) + x\frac{\partial\rho}{\partial u} + y\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \eta(l + b\rho + fr) + x\frac{\partial\rho}{\partial v} + y\frac{\partial r}{\partial v}.$$

On voit que, si l'on détermine r et ρ par les conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} h + a\rho + er = 0, \\ l + b\rho + fr = 0, \end{cases}$$

la surface décrite par N est tangente au plan des xy. Il reste ensuite

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial u} = x\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + y\dfrac{\partial r}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial Z}{\partial v} = x\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + y\dfrac{\partial r}{\partial v}. \end{cases}
$$

Ainsi le plan normal à M *a une enveloppe*. Cette propriété caractérise les surfaces M. En effet, supposons qu'elle existe pour une surface (M)($X_1 X_2 X_3 X_4$); supposons cette surface rapportée à un système conjugué, X_1, X_2, X_3, X_4 vérifieront une équation de la forme

$$
(3) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}.
$$

Posons

$$
2\rho = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.
$$

Les équations du plan normal à M sont

$$
Z_1\frac{\partial X_1}{\partial u} + Z_2\frac{\partial X_2}{\partial u} + Z_3\frac{\partial X_3}{\partial u} + Z_4\frac{\partial X_4}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u},
$$
$$
Z_1\frac{\partial X_1}{\partial v} + Z_2\frac{\partial X_2}{\partial v} + Z_3\frac{\partial X_3}{\partial v} + Z_4\frac{\partial X_4}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v}.
$$

Si ce plan admet une enveloppe, le point de contact vérifiera aussi l'équation

$$
Z_1\frac{\partial^2 X_1}{\partial u\,\partial v} + Z_2\frac{\partial^2 X_2}{\partial u\,\partial v} + Z_3\frac{\partial^2 X_3}{\partial u\,\partial v} + Z_4\frac{\partial^2 X_4}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v}.
$$

De ces trois équations et de l'équation (3) on déduit

$$
\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \rho}{\partial u} + Q\frac{\partial \rho}{\partial v},
$$

ce qui montre que le système conjugué est formé de lignes de courbure.

XV. — Les surfaces de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan.

Les formules (2) du paragraphe précédent montrent que

$$dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2 = d\rho^2 + dr^2.$$

La surface (X) est applicable sur un plan; cette surface est telle que son plan tangent est normal à une série de surfaces. Il résulte d'ailleurs du paragraphe précédent que si cette propriété existe, la surface est applicable sur un plan (sauf le cas d'exception du § XIII). Réciproquement si une surface est applicable sur un plan, son plan tangent est normal à une série de surfaces.

Prenons une telle surface $(X)(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$ et choisissons les variables u, v, de telle sorte que

$$dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2 = du^2 + dv^2.$$

Prenons dans le plan tangent un point $M(X_1 X_2 X_3 X_4)$, tel que

$$X = Z - p\frac{\partial Z}{\partial u} - q\frac{\partial Z}{\partial v},$$

où

$$p = u + \alpha, \qquad q = v + \beta,$$

α et β étant des constantes. On aura

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -p\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - q\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -p\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} - q\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}.$$

Or, on a évidemment

$$\sum\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = 0, \qquad \sum\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0,$$

$$\sum\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0, \qquad \sum\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0.$$

On en déduit

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que la surface (M) est normale au plan tangent à la surface (N). Toutes les surfaces applicables sur un plan sont les surfaces (N) du paragraphe précédent. (Nous laissons de côté le cas où la surface est réglée, ce qui correspond à l'application de deux surfaces réglées l'une sur l'autre.) Étudions ces surfaces (N). Des formules (1) (§ XIV) on déduit

$$\frac{\partial h}{\partial v} + \rho\frac{\partial a}{\partial v} + r\frac{\partial e}{\partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial v} + e\frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial b}{\partial u} + r\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial \rho}{\partial u} + f\frac{\partial r}{\partial u} = 0.$$

En tenant compte des formules (2) (§ IV), (3) (§ XII), (1) (§ XIV), on trouve

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &a\frac{\partial \rho}{\partial v} + e\frac{\partial r}{\partial v} = 0, \\ &b\frac{\partial \rho}{\partial u} + f\frac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right.$$

En différentiant les équations (2) (§ XIV), on trouve, en tenant compte de la relation précédente,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = x\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + y\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}.$$

Ce qui montre que les six quantités Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, ρ, r satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v};$$

c'est l'équation à laquelle satisfont r et ρ. La surface (N) est rapportée à son système conjugué.

Les tangentes aux courbes conjuguées de (N) ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$x\frac{\partial\rho}{\partial u}+y\frac{\partial r}{\partial u},\quad x\frac{\partial\rho}{\partial v}+y\frac{\partial r}{\partial v},$$

ou

$$fx-by,\quad ex-ay.$$

Ces courbes sont rectangulaires si

$$ab+ef=0;$$

c'est le cas où la représentation sphérique de (M) est une surface Σ. Dans ce cas, la surface (N) a des lignes de courbure et est applicable sur un plan. Nous étudions plus loin (§ XIX) ce cas particulier.

On obtient ainsi deux surfaces S_1 et S_2 applicables l'une sur l'autre.

Les coordonnées de S_1,

$$Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3;$$

les coordonnées de S_2,

$$iZ_4,\quad \rho,\quad r.$$

Ces deux surfaces sont rapportées au système conjugué qui se conserve dans la déformation.

XVI. — Projection sur un plan fixe du système conjugué qui se conserve dans la déformation.

Il résulte de ce qui précède que la projection d'un tel système sur un plan fixe a pour coordonnées les quantités ρ et r définies dans le paragraphe précédent. On aura alors

$$\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}=-\frac{a}{e},$$

$$\frac{\dfrac{\partial r}{\partial u}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial u}}=-\frac{b}{f}.$$

L'angle φ_1 que fait la courbe $u =$ const. avec l'axe des x est donné par la formule

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = -\frac{a}{e};$$

il est égal au premier rayon de courbure de la surface (A) (§ IV); de même l'angle de la courbe $v =$ const. est égal au second rayon de courbure de la surface (A). Donc :

Pour que le système conjugué se projette sur un plan fixe suivant un système orthogonal, il faut et il suffit que la surface (A) *soit une surface* Σ.

D'une manière plus générale, *si ces projections se coupent sous un angle constant, la différence des rayons de courbure de* A *est constante.*

Si enfin ces deux projections sont également inclinées sur deux directions fixes, la surface (A) *est une surface minima* (sens non euclidien).

Nous allons chercher les cas dans lesquels l'un de ces systèmes de courbes est formé de lignes droites. Si les courbes de paramètre u sont des droites, on doit avoir

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial \rho}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 r}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial r}{\partial v}},$$

ou

$$a \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + e \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0.$$

En différentiant par rapport à v la relation

$$a \frac{\partial \rho}{\partial v} + e \frac{\partial r}{\partial v} = 0$$

On en déduira

$$m\left(b \frac{\partial \rho}{\partial v} + f \frac{\partial r}{\partial v}\right) = 0.$$

A cause de la relation

$$b\frac{\partial \rho}{\partial u}+f\frac{\partial r}{\partial v}=0,$$

on ne peut avoir

$$b\frac{\partial \rho}{\partial v}+f\frac{\partial r}{\partial v}=0.$$

On aura donc

$$m=0.$$

Il en résulte que a et e sont des fonctions de u seul, et, par un choix convenable de la variable u, on peut poser

$$a=\sin u, \qquad e=\cos u.$$

Pour déterminer b et f, prenons deux inconnues auxiliaires p et q et posons

$$b=p\sin u+q\cos u, \qquad f=p\cos u-q\sin u.$$

Les relations

$$\frac{\partial b}{\partial u}=na, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}=ne$$

donnent

$$\left(p+\frac{\partial q}{\partial u}\right)\cos u+\left(\frac{\partial p}{\partial u}-q\right)\sin u=n\sin u,$$

$$-\left(p+\frac{\partial q}{\partial u}\right)\sin u+\left(\frac{\partial p}{\partial u}-q\right)\cos u=n\cos u,$$

d'où

$$p=-\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad n=\frac{\partial p}{\partial u}-q=-\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}-q.$$

La relation

$$\frac{\partial m}{\partial v}+\frac{\partial n}{\partial u}+ab+ef=0$$

devient

$$-\frac{\partial^3 q}{\partial u^3}-\frac{\partial q}{\partial u}+p=0$$

ou

$$\frac{\partial^3 q}{\partial u^3}+2\frac{\partial q}{\partial u}=0,$$

d'où

$$q = A \cos \sqrt{2}\, u + B \sin \sqrt{2}\, u + C,$$

A, B, C étant fonction de v seul.

Pour déterminer les coordonnées ρ, r de la projection, nous poserons

$$\rho = \alpha \sin u + \beta \cos u,$$
$$r = \alpha \cos u - \beta \sin u.$$

La relation

$$a \frac{\partial \rho}{\partial v} + e \frac{\partial r}{\partial v} = 0$$

donne

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0:$$

α est une fonction de u seul.

La relation

$$b \frac{\partial \rho}{\partial u} + f \frac{\partial r}{\partial u} = 0$$

donne

$$\beta \frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial u} + q\alpha + q \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0,$$

ce qui donne β par une quadrature.

XVII. — Propriétés des systèmes conjugués en coordonnées tangentielles.

Cherchons les cosinus directeurs des normales aux deux surfaces applicables S_1 et S_2. Les tangentes conjuguées de S_1 ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$x_1 \frac{\partial \rho}{\partial u} + y_1 \frac{\partial r}{\partial v}, \quad x_2 \frac{\partial \rho}{\partial u} + y_2 \frac{\partial r}{\partial u}, \quad x_3 \frac{\partial \rho}{\partial u} + y_3 \frac{\partial r}{\partial u},$$
$$x_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + y_1 \frac{\partial r}{\partial v}, \quad x_2 \frac{\partial \rho}{\partial v} + y_2 \frac{\partial r}{\partial v}, \quad x_3 \frac{\partial \rho}{\partial v} + y_3 \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels aux mi-

neurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix}.$$

Ce sont les quantités X, Y, Z (§ IX); la normale à S_1 est parallèle à la droite CD.

Les tangentes conjuguées de S_2 ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial r}{\partial u}, \quad i\left(x_4 \frac{\partial \rho}{\partial u} + y_4 \frac{\partial r}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial v}, \quad \frac{\partial r}{\partial v}, \quad i\left(x_4 \frac{\partial \rho}{\partial v} + y_4 \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

La normale à S_2 a donc ses cosinus directeurs proportionnels

$$i x_4, \quad i y_4, \quad -1.$$

Formons l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces cosinus directeurs.

Or on a

$$\frac{\partial x_4}{\partial u} = a \xi_4, \qquad \frac{\partial x_4}{\partial v} = b \eta_4, \qquad \frac{\partial^2 x_4}{\partial u \, \partial v} = \xi_4 bm + a \frac{\partial \xi_4}{\partial v} = a \frac{\partial \xi_4}{\partial v} + b \frac{\partial \eta_4}{\partial u}.$$

De même

$$\frac{\partial y_4}{\partial u} = e \xi_4, \qquad \frac{\partial y_4}{\partial v} = f \eta_4, \qquad \frac{\partial^2 y_4}{\partial u \, \partial v} = e \frac{\partial \xi_4}{\partial v} + f \frac{\partial \eta_4}{\partial u}.$$

On en conclut que l'équation cherchée est

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{\xi_4} \frac{\partial \xi_4}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta_4} \frac{\partial \eta_4}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

C'est l'équation à laquelle satisfont les coordonnées tangentielles de S_2. Nous allons en déduire la propriété caractéristique des systèmes conjugués qui se conservent dans la déformation. Soient α, β, -1 les cosinus directeurs de la normale à la surface rapportée à son système

conjugué; formons l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces coordonnées; écrivons-la sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Si ce système se conserve dans la déformation, on pourra poser

$$(2) \qquad x_4 = -i\alpha, \qquad y_4 = -i\beta, \qquad \xi_4 = Q\varphi(v), \qquad \eta_4 = Pf(u).$$

Il faudra donc que l'on puisse déterminer les fonctions f et φ de telle sorte que l'on ait

$$(3) \qquad 1 + \alpha^2 + \beta^2 = P^2 f^2(u) + Q^2\varphi^2(v).$$

Réciproquement, cette condition est suffisante. Si elle est remplie, les formules (2) donneront x_4, y_4, ξ_4, η_4.

Remarque. — La condition (3) peut évidemment être remplacée par la suivante :

Soient x, y, z des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface rapportée à un système conjugué. Formons l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta,$$

qui admet comme solutions x, y, z. Pour que le système conjugué se conserve dans la déformation, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer f et φ de telle sorte que

$$x^2 + y^2 + z^2 = P^2 f^2(u) + Q^2\varphi^2(v).$$

On déterminera ensuite a, b, e, f, m, n par les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_4}{\partial u} = a\xi_4, & \dfrac{\partial y_4}{\partial u} = e\xi_4, & \dfrac{\partial \eta_4}{\partial u} = m\xi_4, \\[2ex] \dfrac{\partial x_4}{\partial v} = b\eta_4, & \dfrac{\partial y_4}{\partial v} = f\eta_4, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial v} = n\eta_4. \end{cases}$$

A cause de la relation $x_4^2 + y_4^2 + \xi_4^2 + \eta_4^2 = 1$, on aura aussi

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_4}{\partial u} &= -a x_4 - e y_4 - m \eta_4, \\
\frac{\partial \xi_4}{\partial v} &= -b x_4 - f y_4 - n \xi_4.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile de voir que toutes les relations qui doivent exister en a, b, e, f, m, n sont vérifiées. En effet, x_4 étant solution de l'équation (1), on aura

$$
\frac{\partial^2 x_4}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\xi_4} \frac{\partial \xi_4}{\partial v} \frac{\partial x_4}{\partial u} + \frac{1}{\eta_4} \frac{\partial \eta_4}{\partial u} \frac{\partial x_4}{\partial v} = a \frac{\partial \xi_4}{\partial v} + b m \xi_4.
$$

D'autre part, en différentiant la première des équations (4),

$$
\frac{\partial^2 x_4}{\partial u\, \partial v} = a \frac{\partial \xi_4}{\partial v} + \xi_4 \frac{\partial a}{\partial v};
$$

donc, on a bien

$$
\frac{\partial a}{\partial v} = b m.
$$

On vérifie de même les relations

$$
\frac{\partial b}{\partial u} = a n, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = f m, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = e n.
$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \xi_4}{\partial u\, \partial v}$ tirées de (4) et (5), et en tenant compte des formules qui viennent d'être établies, on trouvera

$$
\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + a b + e f = 0.
$$

Cela posé, la résolution du système (1) (§ IV) se ramènera à une équation de Riccati, puisqu'on en connaît déjà la solution particulière x_4, y_4, ξ_4, y_4.

La surface S_1 étant connue, on connaîtra $\frac{\partial\rho}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial\rho}{\partial v}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$. La surface S_2 se déterminera par les quadratures

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z_i}{\partial u} &= x_i\frac{\partial\rho}{\partial u} + y_i\frac{\partial r}{\partial u}\\ \frac{\partial z_i}{\partial v} &= x_i\frac{\partial\rho}{\partial v} + y_i\frac{\partial r}{\partial v}\end{aligned}\right\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Toutes les surfaces S_2 qu'on peut obtenir ainsi sont égales.

Nous allons former l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X, Y, Z, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la normale à S_1. En différentiant les formules qui donnent les coordonnées des arêtes du tétraèdre ABCD (§ IX) et en tenant compte des équations (1) (§ IV), on trouve

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= -aL_2 + eX_1, & \frac{\partial L}{\partial u} &= -aX_2 + eL_1,\\
\frac{\partial X}{\partial v} &= bL_1 + fX_2, & \frac{\partial L}{\partial v} &= bX_1 + fL_2,\\
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -eX - mX_2, & \frac{\partial L_1}{\partial u} &= -eL - mL_2,\\
\frac{\partial X_1}{\partial v} &= -bL + nX_2, & \frac{\partial L_1}{\partial v} &= -bX + nL_2,\\
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= aL + mX_1, & \frac{\partial L_2}{\partial u} &= aX + mL_1,\\
\frac{\partial X_2}{\partial v} &= -fX - nX_1, & \frac{\partial L_2}{\partial v} &= -fL - nL_1.
\end{aligned}\right.$$

Avec les formules analogues obtenues en remplaçant X et L, soit par Y et N, soit par Z et N. On en déduit

$$(7)\quad \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = fmX_1 + enX_2 + (af - be)L + anL_1 - bmL_2.$$

Cela posé, désignons par A, B, C, D les déterminants

$$(8)\quad A = \begin{vmatrix} X \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} X \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} X \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix},$$

où nous n'écrivons qu'une seule colonne, les deux autres s'en déduisent en remplaçant X soit par Y, soit par Z. En tenant compte des relations (6) et (7), on décomposera ces déterminants en d'autres qui ont été calculés (formules 2, § IX). On trouve

$$A = -ab \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} - af \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + eb \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + ef \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix},$$

$$A = -(af - be)\xi_4\eta_4,$$

$$B = \quad bfm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + ben \begin{vmatrix} X \\ X_2 \\ L_1 \end{vmatrix} + b(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L \\ L_1 \end{vmatrix} + ban \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ L_1 \end{vmatrix} - b^2 m \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix}$$

$$+ f^2 m \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + fen \begin{vmatrix} X \\ X_2 \\ X_2 \end{vmatrix} + f(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L \\ X_2 \end{vmatrix} + fan \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ X_2 \end{vmatrix} - fbm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix},$$

$$B = -(af - be)\xi_4(n\xi_4 + bx_4 + fy_4) = -(af - be)\xi_4 \frac{\partial \eta_4}{\partial v},$$

$$C = -afm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_1 \end{vmatrix} - aen \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} - a(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L \end{vmatrix} - a^2 n \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} + abm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_2 \end{vmatrix}$$

$$+ efm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_1 \end{vmatrix} + e^2 n \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + e(af - be) \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L \end{vmatrix} + ean \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} - ebm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_2 \end{vmatrix},$$

$$C = -(af-be)\eta_4(ax_4+ey_4+m\eta_4) = -(af-be)\eta_4\frac{\partial\xi_4}{\partial u},$$

$$D = \left\{\begin{array}{l}
ab\,fm\begin{vmatrix}X_1\\L_2\\L_1\end{vmatrix} - ab\,en\begin{vmatrix}X_2\\L_2\\L_1\end{vmatrix} - ab(af-be)\begin{vmatrix}L\\L_2\\L_1\end{vmatrix} - ab\,an\begin{vmatrix}L_1\\L_2\\L_1\end{vmatrix} + ab\,bm\begin{vmatrix}L_2\\L_2\\L_1\end{vmatrix}\\
-af\,fm\begin{vmatrix}X_1\\L_2\\X_2\end{vmatrix} - af\,en\begin{vmatrix}X_2\\L_2\\X_2\end{vmatrix} - af(af-be)\begin{vmatrix}L\\L_2\\X_2\end{vmatrix} - af\,an\begin{vmatrix}L_1\\L_2\\X_2\end{vmatrix} + af\,bm\begin{vmatrix}L_2\\L_2\\X_2\end{vmatrix}\\
+eb\,fm\begin{vmatrix}X_1\\X_1\\L_1\end{vmatrix} + eb\,en\begin{vmatrix}X_2\\X_1\\L_1\end{vmatrix} + eb(af-be)\begin{vmatrix}L\\X_1\\L_1\end{vmatrix} + eb\,an\begin{vmatrix}L_1\\X_1\\L_1\end{vmatrix} - eb\,bm\begin{vmatrix}L_2\\X_1\\L_1\end{vmatrix}\\
+ef\,fm\begin{vmatrix}X_1\\X_1\\X_2\end{vmatrix} + ef\,en\begin{vmatrix}X_2\\X_1\\X_2\end{vmatrix} + ef(af-be)\begin{vmatrix}L\\X_1\\X_2\end{vmatrix} + ef\,an\begin{vmatrix}L_1\\X_1\\X_2\end{vmatrix} - ef\,bm\begin{vmatrix}L_2\\X_1\\X_2\end{vmatrix}.
\end{array}\right.$$

$$D = (af-be)[bm\,x_4\eta_4 + an\,x_4\xi_4 + ab\,x_4^2 + (af+be)x_4y_4 + en\,y_4\xi_4 + fm\,y_4\eta_4 + ef\,y_4^2],$$

$$D = (af-be)[(ax_4+ey_4+m\eta_4)(bx_4+fy_4+n\xi_4) - mn\xi_4\eta_4],$$

$$= (af-be)\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial u}\frac{\partial\eta_4}{\partial v} - mn\xi_4\eta_4\right).$$

L'équation de Laplace, à laquelle satisfont X, Y, Z, étant

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{B}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{C}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{D}{A}\theta,$$

devient

$$(9)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\eta_4}\frac{\partial\eta_4}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial\xi_4}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial\xi_4}{\partial u}\frac{1}{\eta_4}\frac{\partial\eta_4}{\partial v}\right)\theta.$$

XVIII. — Systèmes conjugués qui se conservent sur une infinité de surfaces applicables.

Si un système est conjugué sur plusieurs déformées d'une surface, il faut qu'on puisse déterminer de plusieurs manières différentes le

tétraèdre ABCD (§ IV) correspondant à ce système. Supposons qu'on puisse le faire de deux manières. Pour la deuxième on aura

$$x_4 = -i\alpha, \qquad y_4 = -i\beta, \qquad \xi'_4 = Q\varphi_1(v), \qquad \eta'_4 = Pf_1(u).$$

La condition (3) du paragraphe précédent donne

$$P^2 f^2(u) + Q^2\varphi^2(v) = P^2 f_1^2(u) + Q^2\varphi_1^2(v),$$
$$\frac{P^2}{Q^2} = \frac{\varphi^2 - \varphi_1^2}{f_1^2 - f^2}.$$

Le rapport $\frac{P}{Q}$ étant le produit d'une fonction de u par une fonction de v, on aura

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

L'équation (i') est à invariants égaux.

Réciproquement, s'il en est ainsi, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{\theta(v)}{\psi(u)}.$$

On pourra alors poser

$$\varphi_1^2 = \varphi^2 + h^2\theta^2,$$
$$f_1^2 = f^2 - h^2\psi^2,$$

h étant une constante arbitraire. Le système conjugué se conserve sur une infinité de surfaces applicables (M. Cosserat, *Annales de Toulouse*).

Supposons l'équation (1) du paragraphe précédent ramenée à la forme canonique de M. Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta.$$

Soient ξ, η, ζ les solutions qui correspondent à α, β, 1 :

$$\alpha = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad \beta = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad \text{ou} \qquad x_4 = -\frac{i\xi}{\zeta}, \qquad y_4 = \frac{-i\eta}{\zeta}.$$

L'équation à laquelle satisfont α et β sera

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

En comparant avec l'équation (1), on aura

$$\xi_4 = \frac{f(u)}{\zeta}, \qquad \eta_4 = \frac{\varphi(v)}{\zeta}.$$

La condition (3) devient

$$(1) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = f^2(u) + \varphi^2(v).$$

Cette relation caractérise les systèmes conjugués qui se conservent sur une infinité de surfaces applicables.

Les diverses surfaces applicables s'obtiennent alors en remplaçant f et φ par f_1 et φ_1,

$$(2) \qquad f_1^2 = f^2 + h, \qquad \varphi_1^2 = \varphi^2 - h.$$

Ramenons de même l'équation (9) à sa forme canonique

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M_1\theta.$$

Soient

$$\xi_1 = \rho X, \qquad \eta_1 = \rho Y, \qquad \zeta_1 = \rho Z$$

les solutions; X, Y, Z satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(M_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}\right)\theta.$$

En comparant avec l'équation (9), on aura

$$\xi_4 = \frac{\Phi(v)}{\rho}, \qquad \eta_4 = \frac{F(u)}{\rho}.$$

La comparaison des deux systèmes de valeurs de ξ_4, η_4 donne

$$fF = \varphi\Phi = \text{const.}$$

On peut prendre la constante égale à l'unité. On a

$$\rho = \frac{f\varphi}{\zeta}.$$

On aura alors

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \rho^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = \rho^2(\xi_4^2 + \eta_4^2) = \Phi^2 + F^2,$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{\varphi^2}.$$

La comparaison des coefficients de θ donne ensuite

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + mn - \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial\xi_4}{\partial u}\frac{1}{\eta_4}\frac{\partial\eta_4}{\partial v} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\xi_4\eta_4}\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial v}\frac{\partial\eta_4}{\partial u} - \frac{\partial\xi_4}{\partial u}\frac{\partial\eta_4}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$M_1 = M.$$

Les équations (1) et (9) proviennent d'une même équation de M. Moutard.

On arrive donc à ce résultat :

Si une équation de M. Moutard admet trois solutions ξ, η, ζ liées par la relation

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0,$$

elle admet une infinité de systèmes analogues.

Considérons le cas particulier où les fonctions f et φ se réduisent à des constantes; dans ce cas, ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses asymptotiques; il en est de même de ξ_1, η_1, ζ_1. Les couples de surfaces applicables sont rapportés à un système de géodésiques conjuguées (M. Cosserat, *Annales de Toulouse*).

On peut remarquer que, dans ce cas, le passage de ξ, η, ζ à ξ_1, η_1, ζ_1 donne une transformation des surfaces à courbure totale constante.

Si l'on poursuit les calculs, on voit que cette transformation n'est autre que celle qui a été indiquée par M. Lie.

Dans ce cas particulier, le rapport $\frac{\xi_4}{\eta_4}$ est constant, ce qui revient à dire que le rapport des puissances des foyers C et D (§ IV) par rapport à la sphère fondamentale est constant.

Si l'on suppose que ce rapport constant est égal à l'unité, on obtient une congruence (CD) qui jouit des propriétés suivantes :

1° Ses foyers sont conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

2° Cette congruence est une congruence cyclique et de Ribaucour (pour la définition de ces congruences cycliques et de Ribaucour, *voir* Cosserat, *Annales de Toulouse*).

3° Le plan central de cette congruence passe par le centre de la sphère.

Nous reviendrons sur ces congruences spéciales (2e Partie, § IV).

XIX. — Cas où la représentation sphérique est une surface Σ.

Dans ce cas, la surface (M) est applicable sur un plan. En effet, on a pour le ds^2 de cette surface

$$ds^2 = h^2\, du^2 + l^2\, dv^2.$$

La condition d'applicabilité sur le plan est

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial l}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \frac{\partial n}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial v}.$$

Il résulte de là que, pour qu'une surface ait des lignes de courbure et soit applicable sur un plan, il faut et il suffit que la représentation sphérique de la surface soit une surface Σ.

Nous savons que, dans ce cas, la surface (N) enveloppe des plans normaux à (M) a des lignes de courbure (§ XV). La représentation sphérique de (N) est une autre surface Σ; la surface (N) est analogue à (M).

On pourra continuer ainsi, l'enveloppe des plans normaux de (N)

sera encore une surface applicable ayant des lignes de courbure; on pourra continuer jusqu'à ce qu'on tombe sur une surface réduite à un point.

On peut aussi opérer en sens inverse. Le plan tangent à (M) est orthogonal à une série de surfaces. Soit (M_1) l'une d'elles. Le plan normal à M_1, enveloppant une surface qui a des lignes de courbure M_1, est applicable sur un plan.

La détermination de l'une de ces surfaces exige l'intégration de l'équation (7) (§ XII). En général, on ne sait pas intégrer cette équation; mais on peut toujours, à l'aide de quadratures seulement, déterminer une infinité de ces surfaces. Il suffit de partir d'une surface Σ et de prendre la surface orthogonale à ses plans tangents.

Nous savons que la recherche des surfaces qui font l'objet de ce paragraphe permet de déterminer tous les couples de surfaces applicables, telles que le système conjugué de l'une d'elles se projette sur un plan fixe suivant un système orthogonal (§ XVI).

XX. — Autre cas particulier.

Considérons d'une manière générale une surface S dans l'espace à quatre dimensions. Soient M un point de cette surface; MT l'une des tangentes en M à la surface X_1, X_2, X_3, X_4 les cosinus directeurs de cette tangente, cosinus qui sont liés par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1.$$

A cette tangente MT nous pouvons faire correspondre le point t de l'espace non euclidien qui a pour coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4. Il est clair que quand la tangente MT tourne autour du point M, le point t décrit une droite m. Cette droite m sera ce que nous appellerons la *représentation sphérique* du point M de la surface S. A la surface S correspond un ensemble de droites (m), qui forment une congruence; cette congruence est la *représentation sphérique* de la surface S.

Soient Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 les coordonnées de M exprimées en fonction de deux variables u et v. Supposons que ces variables soient les paramètres du système conjugué tracé sur (S). Soient de plus MS et MT

les tangentes conjuguées; X_1, X_2, X_3, X_4 les cosinus de MS; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ceux de MT. On aura des formules de la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = hX,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = lY$$

(où nous supprimons les indices); le système étant conjugué, $\frac{\partial^2 Z}{\partial u \, \partial v}$ doit être linéaire et homogène en X, Y; il en sera de même par conséquent de $\frac{\partial X}{\partial v}$ et de $\frac{\partial Y}{\partial u}$. Il en résulte que les points s et t, qui correspondent aux directions MS, MT, sont les foyers de la droite (m). Ainsi :

Au système conjugué de S correspondent les foyers de la représentation sphérique.

On peut aller plus loin, la droite MS touche une seconde surface en un point N. La surface N, qui se déduit de M par la transformation de Laplace, est rapportée à son système conjugué. A la tangente NS correspond le point s; il en résulte que la représentation sphérique de N est la congruence déduite de (m) par la méthode de Laplace, cette méthode étant appliquée à la surface (s). Donc, *si deux surfaces ont même représentation sphérique, il en est de même de celles qu'on en déduit par la méthode de Laplace.*

L'angle formé par les tangentes conjuguées d'une surface est égal à la distance (non euclidienne) *des foyers de la représentation sphérique.*

Il résulte d'ailleurs de tout ce qui précède :

Si la surface S a des lignes de courbure, sa représentation sphérique est une congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à la quadratique fondamentale.

Si la surface S est applicable sur un plan, sa représentation sphérique est une congruence dont les plans focaux sont conjugués par rapport à la quadratique fondamentale.

Si donc, on veut chercher les surfaces applicables sur un plan qui, par la méthode de Laplace, se transforme en une surface analogue, il suffit de chercher les congruences AB (§ IV), qui se transforment. par la méthode de Laplace, en une congruence ayant ses plans focaux conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. S'il en est ainsi. le système conjugué découpé sur l'une des focales de la congruence (AB) est formé de géodésiques (non euclidiennes).

Si, de même, on veut trouver les surfaces qui ont des lignes de courbure, et qui se transforment en surfaces analogues par la méthode de Laplace, il suffit de trouver les congruences (CD) (§ IV), qui se transforment en congruences ayant leurs foyers conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

Ces deux problèmes sont équivalents. En effet, soient F_1, F_2 les foyers de la congruence (AB). La surface focale (F_1) est la polaire réciproque de la surface engendrée par C. Les tangentes conjuguées découpées par les développables de la congruence (AB) sur F_1 ont pour polaires conjuguées (en intervertissant les variables) les tangentes conjuguées découpées sur (C) par les développables de la congruence (CD).

Si donc les deux congruences formées par les tangentes conjuguées sur F_1 ont leurs plans focaux rectangulaires (sens non euclidien), de même, les congruences formées par les tangentes aux lignes conjuguées de (C) auront leurs foyers conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

Nous allons traiter le second problème. La tangente à la courbe de paramètre v tracée sur la surface (C) passe par le point dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$ax + ey + m\eta_i;$$

posons alors

$$a = \rho\alpha, \qquad e = \rho\beta, \qquad m = \rho\gamma,$$

α, β, γ étant liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Le point $D'(\eta'_{1}, \eta'_{2}, \eta'_{3}, \eta'_{4})$, qui est le conjugué de c sur cette tan-

gente, a pour coordonnées

$$\eta_1' = \alpha x + \beta y + \gamma \eta_1.$$

Exprimons que D' est le second foyer de la congruence (CD'), il faut que $\frac{\partial \eta_1'}{\partial v}$ ne contienne ni x, y, η_1.

Or, on a

$$\frac{\partial \eta_1'}{\partial v} = x\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - b\gamma\right) + y\left(\frac{\partial \beta}{\partial v} - f\gamma\right) + \eta_1\left(\alpha b + \beta f + \frac{\partial \gamma}{\partial v}\right) + \xi(-\gamma n).$$

On doit donc avoir

$$(1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} - b\gamma = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} - f\gamma = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha b + \beta f + \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0.$$

Les relations (1), en tenant compte des relations

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = fm,$$

donnent

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

En choisissant convenablement la variable u, on peut supposer

$$\rho = 1.$$

On a alors

$$a = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad m = \gamma,$$

puis

$$b = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad f = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \beta}{\partial v}.$$

La relation (2) peut alors s'écrire

$$ab + ef + \frac{\partial m}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

On peut distinguer deux cas :

1° $n = 0$, c'est un cas qui a été étudié § XVI ; le point C décrit une courbe, il est impossible d'appliquer la méthode de Laplace ;

2° En choisissant convenablement la variable v, on peut faire

$$n = 1.$$

Posons alors

$$a = \cos\theta \cos\varphi, \qquad e = \cos\theta \sin\varphi, \qquad m = \sin\theta ;$$

puis écrivons que

$$\frac{\partial b}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = e.$$

On aura les deux équations aux dérivées partielles qui déterminent θ et φ. Une solution remarquable, c'est de supposer θ constant, φ est de la forme $pu + qv$, p et q étant constants. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, les deux congruences qui se déduisent de la congruence (CD) sont des congruences de normales.

Cela posé, considérons dans l'espace à quatre dimensions une surface (M) jouissant de la deuxième propriété ; on en déduira une surface analogue (M_1), par la méthode de Laplace. A cette surface M_1 correspond une enveloppée (N_1) qui jouit de la première propriété. On en déduit, par la méthode de Laplace, une surface analogue N_2 ; prenons la surface M_2 orthogonale aux plans tangents de N_2, elle jouira de la seconde propriété. On pourra opérer sur M_2 comme sur M, et ainsi de suite.

Considérons le couple N_1, N_2, soient S_1 et S_2 les projections de ces surfaces dans l'espace à trois dimensions. S_1 et S_2 sont les focales d'une congruence ; les lignes conjuguées tracées par les développables sur S_1 et S_2 se conservent dans la déformation de ces surfaces. Nous obtenons donc une solution du problème suivant :

Trouver une congruence telle que les systèmes conjugués, dé-

coupés par les développables sur les focales, sont encore conjugués sur une déformée de chacune de ces focales.

La solution obtenue est telle qu'on peut, par quadrature, en déduire une infinité d'autres.

XXI. — Troisième cas particulier.

Cherchons de même le cas où une surface (N), applicable sur un plan, se transforme, par la méthode de Laplace, en une surface (M) qui a des lignes de courbure. Il faut, d'après ce qui précède, trouver les congruences (CD), telles que celles qu'on en déduit par la méthode de Laplace soient des congruences de normales (sens non euclidien). Il faut et il suffit pour cela que les courbes de paramètre v tracées sur la surface (C) (§ IV) soient des géodésiques, c'est-à-dire que les quatre points dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités

$$\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \quad ay - ex$$

(le dernier est un point de la normale à c) soient dans un même plan. Or, on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - ey - m\eta_1,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = -(a^2 + e^2 + m^2)\xi - x\frac{\partial a}{\partial u} - y\frac{\partial e}{\partial u} - \eta_1\frac{\partial m}{\partial u}.$$

La condition cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} -e & a & 0 \\ a & e & m \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial e}{\partial u} & \dfrac{\partial m}{\partial u} \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$-(a^2 + e^2)\frac{\partial m}{\partial u} + m\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + e\frac{\partial e}{\partial u}\right),$$

d'où

$$a^2 + e^2 = m^2 f^2(v).$$

On en déduit, en prenant la dérivée par rapport à v,

$$m\left[\frac{\partial m}{\partial v}f^2(v) + mf(v)f'(v)\right] = a\frac{\partial a}{\partial v} + e\frac{\partial e}{\partial v} = m(ab + ef),$$

ou

$$\frac{\partial m}{\partial v}f^2 + mff' = ab + ef = -\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial m}{\partial v}\sqrt{1 + f^2} + m\frac{ff'}{\sqrt{1+f^2}} = \frac{-\frac{\partial n}{\partial u}}{\sqrt{1+f^2}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(m\sqrt{1+f^2}) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{n}{\sqrt{1+f^2}}\right).$$

On peut alors poser

$$m = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad n = -\sqrt{1+f^2}\,\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

On posera alors

$$a = mf(v)\sin\varphi, \qquad e = mf(v)\cos\varphi.$$

On en déduira b et f par les relations

$$\frac{\partial a}{\partial v} = mb, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = mf.$$

Puis, en écrivant que les relations

$$\frac{\partial b}{\partial u} = na, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = ne$$

sont satisfaites, on aura les deux équations aux dérivées partielles qui donnent θ et φ.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut déduire d'un couple (M), (N) une infinité de couples analogues.

XXII. — Sur quelques propriétés générales des congruences.

Nous allons indiquer ici quelques propriétés générales des congruences, dont quelques-unes nous semblent nouvelles, et qui nous seront utiles dans la suite.

Considérons d'abord deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent par parallélisme des plans tangents. Les développables engendrées par la congruence AB découpent sur ces surfaces des réseaux conjugués, dont les tangentes sont parallèles. Toutes les surfaces (M), décrites par un point M qui partage la droite AB dans un rapport constant, ont leurs plans tangents parallèles à (A). Si donc deux points d'une droite d'une congruence décrivent des surfaces dont les plans tangents sont parallèles, les développables de la congruence découpent sur ces surfaces des réseaux conjugués. Cette propriété est bien connue.

Inversement, *soit* (D) *une congruence, qui découpe sur une surface* (S) *un réseau conjugué, il y aura une infinité de points de la droite* D *qui décrivent des surfaces parallèles à* (S).

En effet, soient x, y, z les coordonnées d'un point S de la surface (S) rapportée à un système conjugué, α, β, γ des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la droite D. Un point M de la droite D a pour coordonnées X, Y, Z :

$$X = x + \alpha\rho,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \alpha\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Puisque la congruence D est rapportée à ses développables, il faut qu'on puisse choisir ρ de telle sorte que $\frac{\partial X}{\partial u}$ ne contienne que α ; de même, on doit pouvoir choisir une autre valeur de ρ telle que $\frac{\partial X}{\partial v}$ ne

contienne que α. On doit donc avoir des équations de la forme

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + m\alpha,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = q\frac{\partial x}{\partial v} + n\alpha.$$

En écrivant qu'elles sont compatibles, on trouve

$$p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + m\left(q\frac{\partial x}{\partial v} + n\alpha\right) + \alpha\frac{\partial m}{\partial v}$$
$$= q\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + n\left(p\frac{\partial x}{\partial u} + m\alpha\right) + \alpha\frac{\partial n}{\partial u}.$$

En remarquant que $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ ne contient que $\frac{\partial x}{\partial v}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$, on conclut :

(1) $$\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Remplaçons α, β, γ par les quantités proportionnelles ξ, η, ζ

$$\alpha = \theta\xi, \qquad \beta = \theta\eta, \qquad \gamma = \theta\zeta,$$

on aura

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{p}{\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(m - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\xi,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{q}{\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(n - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\xi.$$

D'après la condition (1), on peut choisir θ de telle sorte que

$$m - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \qquad n - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

On aura alors

(2) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \mathrm{P}\frac{\partial\xi}{\partial u},\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \mathrm{Q}\frac{\partial\xi}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

On voit alors que si ρ est constant, et dans ce cas seulement, le point

de la droite D qui a pour coordonnées

$$X = x + \rho\xi, \qquad Y = y + \rho\eta, \qquad Z = z + \rho\zeta$$

décrit une surface parallèle à (S).

On voit facilement que :

Si D est une congruence, S un réseau conjugué de cette congruence, Σ un réseau conjugué parallèle à S, les droites Δ, menées par les points de Σ parallèles à D, forment une congruence rapportée à ses développables.

En effet, si x', y', z' sont les coordonnées de Σ, $\frac{\partial x'}{\partial u}$ est proportionnel à $\frac{\partial x}{\partial u}$, par suite à $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, de même $\frac{\partial x'}{\partial v}$ est proportionnel à $\frac{\partial \xi}{\partial v}$. On a donc

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = P_1 \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = Q_1 \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Le point (X', Y', Z')

$$X' = x' + \rho\xi$$

sera foyer si $\rho = -P_1$ ou $\rho = -Q_1$.

Nous indiquerons encore la propriété suivante :

Si deux congruences ont même représentation sphérique de leurs développables, à tout réseau conjugué de la première correspond un réseau parallèle dans la deuxième.

Soient (Δ) une congruence parallèle à la congruence D; $F_1(x_1, y_1, z_1)$ l'un des foyers. On aura

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = h\xi,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = l\xi + m\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Écrivons que ces formules sont compatibles et remarquons que

$$(P - Q)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

On obtiendra, entre autres relations, la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial u}. \tag{3}$$

Cela posé, un point M(X, Y, Z) de la droite Δ a pour coordonnées

$$X = x_1 + \rho\xi,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \xi\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + l\right) + \rho\frac{\partial \xi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \xi\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + h\right) + (\rho + m)\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Si l'on choisit ρ de telle sorte que

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = -l, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial v} = -h,$$

ce qui est possible à cause de (3), le point M décrit un réseau conjugué parallèle à S.

XXIII. — Propriétés des congruences AB.

La congruence AB (§ IV) a ses plans focaux conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. M. Ribaucour a démontré que, dans ce cas, les développables de AB découpent, à l'entrée et à la sortie, un réseau conjugué sur la quadrique. Il est facile de vérifier ce fait. Les points $M_1(X_1 X_2 X_3 X_4)$, $M_2(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$, où la droite AB coupe la sphère, ont pour coordonnées

$$X = x + iy, \qquad Y = x - iy,$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(a + ie)}{a + ie}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\frac{\partial}{\partial u}(b + if)}{b + if}\frac{\partial X}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(a - ie)}{a - ie}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\frac{\partial}{\partial u}(b - if)}{b - if}\frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Ces deux réseaux conjugués (M_1) et (M_2) sont rectangulaires (sens ordinaire).

D'après le paragraphe précédent, il y aura une série de réseaux conjugués parallèles à M_1, une autre série parallèle à M_2; ces réseaux conjugués sont formés de lignes de courbure, donc :

Il y a deux séries de surfaces qui sont découpées suivant leurs lignes de courbure par les développables de AB.

La même propriété subsiste pour les congruences parallèles à AB.

On peut construire les congruences AB de la façon suivante. On prendra un réseau rectangulaire M_1 sur la sphère; soit S une surface dont les lignes de courbure ont pour représentation sphérique M_1; la congruence formée par les droites qui joignent les points correspondants de la sphère et de S est une congruence AB. Si l'on ne veut pas mettre en évidence les développables de AB, on pourra dire simplement : on établit une correspondance par parallélisme des plans tangents entre une surface et la sphère. Les congruences cherchées sont formées des droites qui joignent les points correspondants des deux surfaces.

Il est clair que toutes les congruences dont les développables découpent sur la sphère un réseau orthogonal sont des congruences AB.

Cela posé, nous allons établir la propriété suivante :

Si une surface S *est coupée suivant ses lignes de courbure par les développables d'une congruence, cette congruence* (D) *est parallèle à une congruence* AB; *il y a, par conséquent, deux séries de surfaces qui jouissent de la même propriété que* S.

En effet, soit M le réseau orthogonal de la sphère fondamentale qui est la représentation sphérique des lignes de courbure de S; Δ la congruence formée par les parallèles à D; cette congruence est rapportée à ses développables; c' est une congruence AB, ce qui démontre le théorème.

Considérons d'une manière générale une congruence parallèle à AB, soient P(x, y, z) et Q(x_1, y_1, z_1) deux points qui décrivent des lignes de courbure parallèles; α, β, γ les cosinus directeurs de la normale

aux surfaces (P) et (Q). On aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -R\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -R_1\frac{\partial \alpha}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -R'\frac{\partial \alpha}{\partial v}. \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -R'_1\frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

R et R′ sont les rayons de courbure de (P), R_1, R'_1 ceux de (Q). Un point de la droite PQ a pour coordonnées

$$X = x + \rho(x_1 - x);$$

donc

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u}(x_1 - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial u}[-R + \rho(R - R_1)],$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v}(x_1 - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}[-R' + \rho(R' - R_1)].$$

Les valeurs de ρ correspondant aux foyers F et F′ sont

$$\rho = \frac{R}{R - R_1}, \qquad \rho' = \frac{R'}{R' - R'_1}.$$

Les coordonnées de ces foyers sont alors

$$X = x(1 - \rho) + \rho x_1, \qquad X'_1 = x(1 - \rho') + \rho' x_1.$$

Supposons que la surface P soit une sphère de rayon l, on aura

$$R = R' = -l, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$
$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = lp, \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d^2.$$

p est la distance du plan tangent de Q à l'origine, d la distance du point Q à l'origine. Écrivons que les deux foyers sont conjugués par rapport à la sphère P,

$$l^2(1 - \rho)(1 - \rho') + lp[\rho(1 - \rho') + \rho'(1 - \rho)] + d^2\rho\rho' - l^2 = 0$$

ou

$$l^2(\rho\rho' - \rho - \rho') + lp(\rho + \rho' - 2\rho\rho') + d^2\rho\rho' = 0:$$

en remplaçant ρ et ρ' par leurs valeurs

$$d^2 - l^2 + (R_1 + R'_1)(p - l) = 0.$$

La recherche des surfaces Σ (§ VI) revient à trouver des surfaces telles que l'on ait

$$d^2 + 1 + (R + R')(p - i) = 0.$$

XXIV. — Congruences cycliques.

Prenons une congruence parallèle à AB; soient P et Q deux points qui décrivent des lignes de courbure de systèmes distincts. Les tangentes de courbure correspondantes se rencontrent en R et S. Le tétraèdre PQRS est semblable au tétraèdre ABCD (§ IV). Le plan passant par RS et le milieu de PQ est perpendiculaire à PQ. Ce plan touche une surface en un point O où se rencontrent les normales en P et Q aux surfaces P, Q. La sphère de centre O et de rayon OP, enveloppe les surfaces P et Q, sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent; la surface des centres O est rapportée à un cylindre conjugué dont les tangentes sont OR, OS. Enfin, le cercle qui passe par P et Q et qui a pour axe RS est normal à une série de surfaces (Darboux, *Leçons*, 2e Partie, Liv. IV, Chap. IV).

La droite RS engendre une congruence dont les foyers sont R et S. Cette congruence est appelée *congruence cyclique*. Cette congruence est parallèle à la congruence CD, et réciproquement, toute congruence parallèle à une congruence CD est une congruence cyclique.

On sait que les coordonnées x, y, z du point O et le rayon R de la sphère OP (Darboux, *loc. cit.*) satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

et que l'on a

$$\frac{\partial x}{du}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Il en résulte que le point de l'espace à quatre dimensions, qui a

pour coordonnées x, y, z, iR, décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure.

La surface des centres est la projection, dans l'espace à trois dimensions, d'une surface de l'espace à quatre, qui admet des lignes de courbure. Les lignes conjuguées sont les projections des lignes de courbure.

Dans le cas d'exception (§ XIII), les deux nappes P et Q sont confondues, la sphère mobile est osculatrice à une surface. L'un des systèmes de lignes conjuguées est formé de géodésiques.

Nous allons résoudre divers problèmes :

1° *Un système conjugué étant donné, reconnaître si ce système est le système conjugué découpé sur la surface des centres et, dans ce cas, déterminer les sphères.*

L'équation à laquelle satisfont x, y, z et R est (§ XII)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Le système conjugué étant donné, h est déterminé à une fonction près de u, l de v; les formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = h\xi_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = h\xi_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = l\eta_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = l\eta_3,$$

donneront ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3, les premières sont déterminées à un facteur près qui est fonction de u, les secondes à un facteur près qui est fonction de v. On aura ensuite

$$\xi_4 = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}, \qquad \eta_4 = \sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2};$$

il faudra alors qu'on puisse déterminer les facteurs qui entrent dans ξ et η, de telle sorte que

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \xi_4\eta_4 = 0.$$

Réciproquement, cette condition est suffisante. Supposons-la remplie, x vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi_1 + \frac{\partial l}{\partial u}\eta_1 = \frac{\partial h}{\partial v}\xi_1 + ln\eta_1;$$

d'autre part, on a, par différentiation directe,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \xi_1\frac{\partial h}{\partial v} + h\frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

On en conclut

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = n\eta_1.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = n\eta_1, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = n\eta_2, \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = n\eta_3,$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = m\xi_1, \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial u} = m\xi_2, \qquad \frac{\partial \eta_3}{\partial u} = m\xi_3.$$

On aura ensuite,

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial v} = \frac{-1}{\xi_4}\left(\xi_1\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \xi_2\frac{\partial \xi_2}{\partial v} + \xi_3\frac{\partial \xi_3}{\partial v}\right) = \frac{-n(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)}{\xi_4} = n\eta_4.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial u} = m\xi_4.$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin : la congruence engendrée par CD, $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $D(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ a ses foyers conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

La valeur de R sera ensuite déterminée par

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -hi\xi_4, \qquad \frac{\partial R}{\partial v} = -hi\eta_4.$$

On peut alors se poser la question suivante :

Un système conjugué peut-il être, de plusieurs manières, la projection des lignes de courbure de l'espace à quatre dimensions.

Il faut qu'on puisse, de plusieurs manières, déterminer les facteurs arbitraires qui entrent dans $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$.

Donnons d'abord une solution ; s'il y en a une seconde, on aura

$$\xi'_1 = \xi_1 f, \qquad \xi'_2 = \xi_2 f, \qquad \xi'_3 = \xi_3 f,$$
$$\eta'_1 = \eta_1 \varphi, \qquad \eta'_2 = \eta_2 \varphi, \qquad \eta'_3 = \eta_3 \varphi,$$

f étant fonction de u, φ fonction de v. On déduit

$$\xi'_4 = \sqrt{1 - f^2 + f^2 \xi_4^2}, \qquad \eta'_4 = \sqrt{1 - \varphi^2 + \varphi^2 \eta_4^2}.$$

Écrivons que l'on a

$$\xi'_1 \eta'_1 + \xi_2 \eta'_2 + \xi'_3 \eta'_3 + \xi'_4 \eta'_4 = 0,$$

on trouve

$$(1) \qquad -1 = \frac{f^2}{1 - f^2} \xi_4^2 + \frac{\varphi^2}{1 - \varphi^2} \eta_4^2.$$

Si la relation (1) est satisfaite, le problème posé admettra deux solutions en général. S'il en admet plus de deux, il en admettra une infinité.

S'il y a deux solutions, cela revient à dire qu'il y a deux congruences (AB), (A'B') parallèles entre elles et ayant leurs plans focaux conjugués par rapport à la sphère. La congruence AB découpe sur la sphère deux systèmes orthogonaux M et M_1, la congruence A' B' deux autres M' et M'_1. Sur toute congruence parallèle à AB il y a quatre séries de réseaux conjugués qui sont des lignes de courbure : les représentations sphériques de ces lignes de courbure sont les systèmes M, M_1, M', M'_1.

Un cas particulier où l'équation (1) admet une infinité de solutions est le cas où ξ_4 est fonction de u, η_4 fonction de v. Le système (1) (§ IV) se réduit

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -x;$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -y.$$

Les points A et C se déplacent sur une droite L, les points B et D sur sa conjuguée λ. On voit bien géométriquement qu'il y a une infinité de congruences analogues à AB et parallèles à AB, il suffit de remplacer L et λ par deux droites conjuguées respectivement parallèles à L et λ. Les systèmes orthogonaux découpés par ces congruences sont formés de petits cercles.

2° *Le système conjugué, tracé sur la surface des centres, peut-il être conjugué sur une déformée de cette surface?*

En se servant des formules (6) (§ XVII) et des formules (2) (§ IX) on trouve facilement que L, M, N vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a y_1 - e x_1} \frac{\partial}{\partial v}(a y_1 - e x_1) \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{b y_1 - f x_1} \frac{\partial}{\partial u}(b y_1 - f x_1) \frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta$$

(il est inutile de calculer R). Appliquons le criterium du § XVII.

On devra avoir

$$L^2 + M^2 + N^2 = (a y_1 - e x_1)^2 f^2(u) + (b y_1 - f x_1)^2 \varphi^2(v).$$

Par un choix convenable des variables u et v, on peut réduire les fonctions f et φ à l'unité. On tombe alors sur la condition

$$x_1^2 + y_1^2 = (a y_1 - e x_1)^2 + (b y_1 - f x_1)^2.$$

Cette relation est vérifiée dans le cas des surfaces Σ. Cette relation était d'ailleurs évidente *a priori*. En effet, dans ce cas, toutes les congruences parallèles à (AB) sont aussi des congruences cycliques.

Remarque. — Le problème traité § XX donne une solution particulière des problèmes suivants :

Trouver les congruences cycliques qui se transforment en congruences cycliques par l'application de la méthode de Laplace;

Trouver les congruences parallèles à (AB), *qui se transforment en congruences analogues.*

De même, le problème du § XXI donne une solution particulière de la question suivante :

Trouver les congruences cycliques qui se transforment en congruences parallèles à (AB).

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATION PAR ORTHOGONALITÉ DES ÉLÉMENTS [1].

I. — Formules de la transformation.

Considérons une surface S rapportée à ses asymptotiques. Les coordonnées x, y, z d'un point de cette surface seront données par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \quad \eta \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \dfrac{\partial \eta}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = - \eta \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta \dfrac{\partial \eta}{\partial v}, \end{cases}$$

avec les formules analogues pour y et z ; ξ, η, ζ étant solutions de l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{M}\theta,$$

que nous appellerons *l'équation de M. Moutard,* relative aux asymptotiques de S.

Soit maintenant une surface quelconque Σ, (X, Y, Z) les coordon-

[1] Certains résultats indiqués dans cette Partie étaient déjà connus au moment où ce Mémoire a été rédigé. (*Voir* à ce sujet le IVe Volume du cours de M. Darboux, en particulier le Chapitre relatif à la théorie des douze surfaces.)

nées d'un de ces points. On pourra poser

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + B\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + C\,\xi,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = A_1\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + B_1\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + C_1\,\xi.$$

Écrivons que S et Σ se correspondent par orthogonalité des éléments,

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{dx}{du}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = 0.$$

On aura

$$B = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A + B_1 = 0.$$

Écrivons que les formules simplifiées

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \quad A\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + C\xi,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = -A\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + C_1\,\xi.$$

On aura

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{d\xi}{dv}C + \xi\left(MA + \frac{\partial C}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial u}C_1 - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{dA}{du} + \xi\left(\frac{\partial C_1}{\partial u} - MA\right).$$

On devra donc avoir

$$C = -\frac{\partial A}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{\partial A}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial v} + MA = \frac{\partial C_1}{\partial u} - MA.$$

Posons alors

$$A = -\lambda, \qquad C = \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad C_1 = -\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

La dernière condition donne

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = M\lambda.$$

Donc, toutes les surfaces cherchées Σ sont données par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \xi \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\xi \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \dfrac{\partial \xi}{\partial v}, \end{cases}$$

où λ est une solution quelconque de l'équation (2).

La surface Σ est rapportée à un système conjugué à invariants égaux (Ribaucour), car on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Enfin les deux surfaces applicables $A(x_1 y_1 z_1)$, $A'(x_2 y_2 z_2)$ ont pour coordonnées (M. Moutard)

$$x_1 = x + X, \qquad x_2 = x - X.$$

Réciproquement, de deux surfaces applicables (A), (A'), on déduira un couple analogue à S et Σ. (Nous laissons de côté le cas où les deux surfaces applicables sont réglées.)

Si λ n'est pas linéairement indépendant de ξ, η, ζ, la surface Σ se réduit à un plan; les deux couples de surfaces sont égales.

On a donc les conclusions suivantes :

1° *La recherche des surfaces qui correspondent par orthogonalité des éléments à une surface donnée* S *revient à l'intégration de l'équation de M. Moutard relative aux asymptotiques de* S.

2° Aux asymptotiques de Σ correspond un réseau conjugué à invariants égaux sur S et, inversement, à un tel réseau correspondent les asymptotiques d'une surface Σ. Donc :

La résolution de l'équation de M. Moutard permet de trouver tous les réseaux conjugués à invariants égaux de S.

Pour les avoir effectivement, il faudra intégrer en outre l'équation différentielle des asymptotiques de Σ.

3° *La recherche d'un couple de surfaces applicables est identique à la recherche de quatre solutions d'une même équation de M. Moutard.*

II. — Les congruences de M. Ribaucour.

Menons par chaque point de Σ une parallèle à la normale correspondante de S, on obtient une congruence G dont Σ est la surface moyenne. Les foyers F_1, F_2 de cette congruence ont pour coordonnées :

$$F_1 \qquad X_1 = X + \lambda\xi, \qquad Y_1 = Y + \lambda\eta, \qquad Z_1 = Z + \lambda\zeta,$$
$$F_2 \qquad X_2 = X - \lambda\xi, \qquad Y_2 = Y - \lambda\eta, \qquad Z_2 = Z - \lambda\zeta.$$

On obtient ainsi toutes les congruences dont les développables découpent un réseau conjugué sur la surface moyenne.

On peut en déduire une congruence analogue. Appliquons la transformation de M. Moutard à l'équation (2) en prenant comme transformante la fonction λ; ξ, η, ζ seront remplacés par ξ', η', ζ', et l'on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\lambda\xi') &= \quad \xi\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\xi}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v}(\lambda\xi') &= -\xi\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial\xi}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\xi' = \frac{X}{\lambda}, \qquad \eta' = \frac{Y}{\lambda}, \qquad \zeta' = \frac{Z}{\lambda}.$$

L'équation transformée admet pour solution

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Aux quatre solutions ξ', η', ζ', λ' correspond une surface Σ'; les coordonnées X', Y', Z' de Σ' sont

$$X' = \frac{\xi}{\lambda}, \qquad Y' = \frac{\eta}{\lambda}, \qquad Z' = \frac{\zeta}{\lambda}.$$

La surface Σ' est rapportée à un système conjugué à invariants

égaux; ses tangentes conjuguées sont parallèles à celles de Σ. On obtiendra une congruence G′ analogue à G, ayant pour surface moyenne Σ', les cosinus directeurs des droites de la congruence étant ξ', η', ζ'.

G′ est la congruence conjuguée de G; Σ' la surface conjuguée de Σ.

Ces deux congruences sont telles que la droite qui joint l'origine au point central de l'une est parallèle à la génératrice correspondante de l'autre.

Les foyers de la congruence C′ ont pour coordonnées

$$X'_1 = \frac{\xi}{\lambda} + \frac{X}{\lambda^2},$$

$$X'_2 = \frac{\xi}{\lambda} - \frac{X}{\lambda^2}.$$

Les quatre quantités ξ, η, ζ, λ sont les coordonnées homogènes de la surface Σ'.

III. — Les congruences à lignes asymptotiques correspondantes.

Prenons la surface S du paragraphe (I), qui est définie par les formules

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Menons par chaque point M de cette surface la droite D, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux quantités

$$\eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi',$$

ξ', η', ζ' étant les quantités introduites dans le paragraphe précédent. Et considérons le point M′(x', y', z') ayant les coordonnées

$$x' = x + \eta\zeta' - \zeta\eta'.$$

Ce point décrit une surface S'; on aura alors

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \quad \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u} + \eta \frac{\partial \zeta'}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta'}{\partial u} + \zeta' \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta' \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x'}{\partial v} = - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} + \eta \frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta'}{\partial v} + \zeta' \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta' \frac{\partial \zeta}{\partial v}.$$

En tenant compte des relations (1) du paragraphe précédent, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \quad \eta' \dfrac{\partial \zeta'}{\partial u} - \zeta' \dfrac{\partial \eta'}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = - \eta' \dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} + \zeta' \dfrac{\partial \eta'}{\partial v}. \end{cases}$$

La surface S' est rapportée à ses asymptotiques; les cosinus directeurs de S sont proportionnels à ξ, η, ζ; ceux de S' à ξ', η', ζ'; la droite MM' engendre donc une congruence ayant pour focales S et S'; les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales. On obtient ainsi toutes les congruences qui jouissent de cette propriété (C. Guichard, *Comptes rendus;* 1890).

Les projections de MM' sur les axes de coordonnées sont

$$\eta\zeta' - \zeta\eta', \qquad \zeta\xi' - \xi\zeta', \qquad \xi\eta' - \eta\xi'.$$

On a donc

$$\overline{\mathrm{MM'}}^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2$$
$$= \rho^2 \rho'^2 \sin^2 \varphi,$$

où

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

et φ étant l'angle des plans focaux. Si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de S, $R'_1 R'_2$ ceux de S', on a

$$\rho^2 = \sqrt{- R_1 R_2}, \qquad \rho'^2 = \sqrt{- R'_1 R'_2}.$$

La relation peut donc s'écrire

$$(3) \qquad \overline{\mathrm{MM'}}^4 = R_1 R_2 R'_1 R'_2 \sin^4 \varphi.$$

La surface S′ correspond par orthogonalité des éléments à la surface Σ′; on a donc un second couple de surfaces applicables (B), (B′) ayant pour coordonnées

$$(\mathrm{B}) \qquad x'_1 = x' + \mathrm{X}',$$
$$(\mathrm{B}') \qquad x'_2 = x' - \mathrm{X}'.$$

Ce double couple de surfaces applicables a été signalé par M. Ribaucour (*Mémoire sur les Élassoïdes*).

Des formules qui ont été établies, on déduit

$$\overline{\mathrm{AA}'}^2 = 4(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2) = 4\lambda^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 4\lambda^2\rho'^2,$$
$$\overline{\mathrm{BB}'}^2 = 4(\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2 + \mathrm{Z}'^2) = \frac{4}{\lambda^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{4\rho^2}{\lambda^2}.$$

On en déduit donc

$$\overline{\mathrm{AA}'}^2 \times \overline{\mathrm{BB}'}^2 = 16\rho^2\rho'^2 = 16\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2}.$$

Le manque d'homogénéité de cette formule n'étonnera pas si l'on remarque qu'on peut remplacer le couple (A)(A′) par un couple $(\mathrm{A}_1)(\mathrm{A}'_1)$ pourvu que A_1 et A'_1 soient symétriques par rapport au milieu de AA′ et que A_1 divise AA′ dans un rapport constant. Il serait plus logique de dire que le rapport

$$\frac{\overline{\mathrm{AA}'}^2 \times \overline{\mathrm{BB}'}^2}{\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2}}$$

reste fixe quand on se déplace sur les deux couples de surfaces applicables.

IV. — Cas où la congruence précédente est une congruence de normales.

Dans ce cas particulier, les droites de la congruence sont normales à des surfaces de M. Weingarten (Ribaucour); les deux surfaces fo-

cales S et S' sont applicables sur des surfaces de révolution. Pour qu'il en soit ainsi, il faut

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

ou

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0,$$

le plan central de la congruence G passe par un point fixe. Donc :

La recherche des surfaces de M. Weingarten ou, ce qui revient au même, la déformation des surfaces de révolution, est identique à la recherche des congruences de Ribaucour dont le plan central passe par un point fixe.

Dans ce cas particulier, la relation (5) du paragraphe précédent devient

$$\overline{MM'}^4 = R_1 R_2 R'_1 R'_2,$$

relation établie dans ce cas par Halphen.

Il est évident que, l'enveloppée moyenne se réduisant à un point, les développables correspondent à un système conjugué sur cette enveloppée, donc λ doit être une fonction de ρ (C. Guichard, *Comptes rendus*, 1891), mais cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante.

Nous allons donner quelques exemples :

1° Si les surfaces focales sont des courbes, la congruence est une congruence de Ribaucour. Pour que le plan central passe par l'origine, il faut et il suffit que ces deux courbes soient placées sur une même sphère ayant son centre à l'origine. En poursuivant les calculs on trouve la nouvelle classe de surfaces découvertes par M. Weingarten; S et S' sont alors applicables sur un paraboloïde de révolution.

2° Cherchons les congruences satisfaisantes lorsque la surface S est à courbure totale constante. ξ, η, ζ seront ici α_1, β_1 γ_1 (les formules et les notations employées sont celles du Mémoire de M. Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante*, p. 237).

Puisque le plan central passe à l'origine, on a

$$X = p\alpha + q\alpha_2, \qquad Y = p\beta + q\beta_2, \qquad Z = p\gamma + q\gamma_2;$$

on en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \alpha_1(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + \alpha_2\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \alpha\left(\frac{\partial p}{\partial v} - q\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \alpha_1(-q) + \alpha_2\left(\frac{\partial q}{\partial v} + p\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

D'autre part, on doit avoir

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} = \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda\sin\varphi\,\alpha + \lambda\cos\varphi\,\alpha_2,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} = -\alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\alpha_2.$$

En identifiant, on aura :

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \lambda\sin\varphi, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u} = p\sin\varphi + q\cos\varphi, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = \lambda\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = q\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = q, \qquad \lambda = p\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v}.$$

Cela posé, les foyers F_1, F_2 ont pour coordonnées

$$F_1, \qquad X_1 = X + \lambda\alpha_1, \qquad Y_1 = Y + \lambda\beta_1, \qquad Z_1 = Z + \lambda\gamma_1,$$

$$F_2, \qquad X_2 = X - \lambda\alpha_1, \qquad Y_2 = Y - \lambda\beta_2, \qquad Z_2 = Z - \lambda\gamma_2.$$

Formons la quantité

$$\theta = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = p^2 + q^2 - \lambda^2.$$

Les formules écrites plus haut donnent $\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0$. Nous distinguerons deux cas :

1° $$\theta = 0.$$

On a alors

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\lambda^2} = \frac{p^2 + q^2}{\lambda^2} = 1.$$

La seconde surface S′ est aussi à courbure totale constante. La congruence (S, S′) est formée de normales à une surface dont la différence des rayons de courbure est constante.

2°
$$\theta = \text{const.}$$

Les foyers F_1, F_2 sont conjugués par rapport à une sphère fixe. On obtient ainsi la congruence particulière signalée à la fin du § XVIII, Ire Partie. La surface S′ est celle qui est indiquée dans l'Ouvrage de M. Darboux (IIe Partie, n° 782).

V. — L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les coordonnées des surfaces applicables.

Les quatre quantités ξ, η, ζ, λ satisfont à une équation de la forme

$$(1) \qquad A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial u} + E\frac{\partial\theta}{\partial v} + F = 0;$$

on peut prendre pour A, C, D, E, F les valeurs suivantes :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad C = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix},$$

$$E = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dans les déterminants A, C, D, E, F, nous n'écrivons que la première

colonne; les autres s'en déduisent en remplaçant ξ par η ou par ζ, ou par λ. En tenant compte de l'équation (2) (§ I) et de celles qui s'en déduisent par dérivation, on voit que

$$\frac{\partial A}{\partial u} = - D, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} = - F.$$

Cela posé, des formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \xi \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda \frac{\partial \xi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = - \xi \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

on déduit

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \xi \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} - \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = - \eta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} + \zeta \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = - \xi \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}.$$

On voit facilement alors que x, y, z, X, Y, Z sont solutions de l'équation

$$(2) \qquad A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Il en est de même évidemment des coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$ du couple (A), (A′) de surfaces applicables.

L'équation différentielle des caractéristiques de cette équation est

$$C\, du^2 - A\, dv^2 = 0.$$

C'est l'équation du système conjugué commun aux deux surfaces applicables; c'est aussi celle qui donne le système conjugué commun aux deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments. Sur la surface Σ, les tangentes à ce système conjugué forment une division harmonique, avec les tangentes aux courbes de coordonnées, qui forment un système à invariants égaux.

D'une manière générale, nous dirons que deux systèmes conjugués

qui se trouvent dans la relation qui vient d'être indiquée sont harmoniques. Il est clair que tout système conjugué a un harmonique et un seul. D'après cela :

La propriété caractéristique des systèmes conjugués qui se conservent dans la transformation par orthogonalité des éléments est d'avoir pour harmonique un système à invariants égaux.

On peut aller plus loin. L'équation

$$C\,du^2 - A\,dv^2 = 0$$

est celle qui donne les asymptotiques de la surface Σ'. Ainsi :

Le système conjugué commun au couple A, A' ou au couple S, Σ correspond aux asymptotiques de Σ'.

Cette surface Σ' sera appelée la *représentante* du couple de surfaces applicables AA'.

VI. — Propriétés de ces systèmes conjugués.

Les deux surfaces Σ' et Σ ont leurs plans tangents parallèles; aux lignes asymptotiques de l'une correspond un système conjugué de l'autre. Il en résulte qu'en chaque point la tangente à l'une des lignes asymptotiques est parallèle à la tangente à la ligne conjuguée qui appartient à l'autre système. Enfin ces systèmes conjugués sont à invariants égaux en coordonnées tangentielles.

Prenons une surface S rapportée à ses asymptotiques : soient x, y, z les coordonnées d'un point M de cette surface, MT, MS les deux tangentes asymptotiques. On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \alpha\,\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \alpha_1\frac{\partial x}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

avec les formules analogues pour y et z. Il existe des relations entre α,

β, α_1, β_1, entre autres la suivante :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{\partial\beta_1}{\partial u}.$$

Mais nous n'aurons pas à nous en servir. Désignons par X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 les coordonnées de la tangente MT; X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2 celles de MS. Nous poserons

$$X_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad L_1 = y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$X_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad L_2 = y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v},$$

avec les formules analogues pour les quantités Y, Z, M, N. On aura, en tenant compte des équations (1),

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \alpha X_1 + \beta X_2, & \dfrac{\partial L_1}{\partial u} = \alpha L_1 + \beta L_2, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2, & \dfrac{\partial L_2}{\partial v} = \alpha_1 L_1 + \beta_1 L_2. \end{cases}$$

Déterminons deux surfaces Σ_1, Σ_2 par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = p X_2, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = p L_2, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = q X_1, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = q L_1. \end{cases}$$

En écrivant que ces équations sont compatibles, on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} + p\beta_1 = q\beta, \\ \dfrac{\partial q}{\partial u} + q\alpha = p\alpha_1. \end{cases}$$

Les six quantités $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ satisfont à l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{\beta q}{p}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\alpha_1 p}{q}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Les surfaces Σ_1, Σ_2 sont rapportées à un système conjugué commun; elles se correspondent en outre par orthogonalité des éléments. Il résulte, de ce qui a été dit plus haut, qu'on obtient ainsi toutes les surfaces cherchées.

Au lieu de résoudre le système (3), on peut opérer ainsi : soient ξ, η, ζ les solutions de l'équation de M. Moutard relative à la surface S; la surface Σ_1 étant parallèle à la surface S, ses coordonnées tangentielles seront ξ, η, ζ, λ; λ étant une quatrième solution de l'équation de M. Moutard. λ étant connu, on pourra calculer $\frac{\partial x_1}{\partial v}$, $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, ce qui donnera p et q. La seconde surface Σ_2 se déterminera ensuite à l'aide de quadratures. Il en résulte que tout système conjugué à invariants égaux tangentiels se conserve sur une surface qui correspond par orthogonalité des éléments. Donc :

La propriété caractéristique des systèmes conjugués, communs à deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments, c'est d'être à invariants égaux tangentiels.

Tout système à invariants égaux ponctuels admet pour harmonique un système à invariants égaux tangentiels, et inversement.

Si un système conjugué est à invariants égaux en tangentielle et en ponctuelle, il en est de même de son harmonique.

Nous allons déterminer ces derniers systèmes. Prenons sur une surface $\Sigma(X, Y, Z)$ un système à invariants égaux (en ponctuelle), les coordonnées vérifient l'équation (2). Si, d'autre part, ce système est à invariants égaux (en tangentielle), il sera possible de déterminer des coordonnées x', y', z', telles que l'on ait

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = p\frac{\partial X}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = q\frac{\partial X}{\partial u},$$

d'où l'on déduit

$$p\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = q\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}.$$

En identifiant avec l'équation (2), on trouve

$$\frac{q}{A} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial A}{\partial u}} = \frac{p}{C} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\frac{\partial C}{\partial v}},$$

On en déduit d'abord

$$(3) \qquad Aq = \varphi(v), \qquad pC = f(u);$$

de plus, on doit avoir

$$Ap = Cq = \psi$$

et, par conséquent, en tenant compte des relations (3),

$$\psi = \sqrt{f\varphi}.$$

Le rapport $\frac{A}{C}$ est alors le produit d'une fonction de u par une fonction de v. On peut, en supposant choisies convenablement les variables u et v, dire que la condition cherchée est

$$A = C.$$

Examinons maintenant les divers cas particuliers qui se présentent naturellement :

1° Si la surface représentante est une sphère, le système conjugué commun aux deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments est formé de lignes de longueur nulle. Les deux surfaces sont des surfaces minima.

2° Si la surface représentante est une surface réglée, les quantités $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ restent fixes quand on se déplace sur une génératrice. Il en résulte que les tangentes aux courbes de paramètre v conservent une direction fixe quand on se déplace sur les courbes de paramètre u. L'un des systèmes conjugués est formé des courbes de contact de la surface avec des cylindres. Si la surface représentante est une quadrique, les deux systèmes de lignes conjuguées jouissent de la propriété indiquée plus haut.

Ces deux propriétés existent aussi pour les couples de surfaces applicables qui y correspondent. Ce sont d'ailleurs les seuls cas où elles existent.

3° Si la surface représentante est une surface minima, le système conjugué qui se conserve dans la transformation par orthogonalité des éléments est formé de lignes de courbure sur l'une des deux surfaces.

VII. — Les systèmes conjugués communs à deux surfaces applicables.

Les deux surfaces applicables A_1 et A_2 ont pour coordonnées

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = p(X_2 + L_2), \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial u} = p(X_2 - L_2),$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial v} = q(X_1 + L_1), \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial v} = q(X_1 - L_1).$$

Ces coordonnées satisfont à l'équation (5) du paragraphe précédent; donc

Le système conjugué qui se conserve dans la déformation est à invariants égaux dans le cas où $A = C$.

Si l'on veut que l'un des systèmes conjugués soit formé des courbes de contact de cylindres circonscrits à la surface, il faut que l'un des coefficients de $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ ou de $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ soit nul; dans ce cas, la surface représentante est une surface réglée.

Supposons qu'on ait multiplié les quantités X, Y, Z, L, M, N par un même facteur, de façon que l'on ait, comme dans la Géométrie non euclidienne,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

Les cosinus directeurs des tangentes conjuguées sur la première surface sont

$$X_2 + L_2, \quad Y_2 + M_2, \quad Z_2 + N_2,$$

$$X_1 + L_1, \quad Y_1 + M_1, \quad Z_1 + N_1.$$

L'angle des deux tangentes conjuguées est

$$\cos\varphi = (X_1 + L_1)(X_2 + L_2) + (Y_1 + M_1)(Y_2 + M_2) + (Z_1 + N_1)(Z_2 + N_2);$$

cette formule est aussi celle qui donne l'angle non euclidien de deux droites qui se coupent; donc

L'angle des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation est égal à l'angle non euclidien formé par les asymptotiques de la représentante.

Pour que ce système soit formé de lignes de courbure, il faut que la surface représentante soit une surface minima non euclidienne (§ VIII, Ire Partie). En tenant compte des formules (2) (§ VII, Ire Partie), on voit facilement que la représentation sphérique des lignes de courbure qui se conservent dans la déformation est celle des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante (Bonnet).

D'une façon plus générale, on peut chercher le cas où les lignes du système conjugué se coupent sous un angle constant. L'angle non euclidien des asymptotiques de la représentante doit être constant, c'est-à-dire que le rapport $\frac{af}{be}$ (§ IV, Ire Partie) doit être constant.

Désignons par X, Y, Z, L, M, N les coordonnées de la normale non euclidienne à la représentante. On aura alors

$$(X + L)(X_1 + L_1) + (Y + M)(Y_1 + M_1) + (Z + N)(Z_1 + N_1) = 0,$$
$$(X + L)(X_2 + L_2) + (Y + M)(Y_2 + M_2) + (Z + N)(Z_2 + N_2) = 0.$$

Il en résulte que $X + L$, $Y + M$, $Z + N$ sont les cosinus directeurs de la normale à A_1; de même la normale à A_2 a pour cosinus directeurs $X - L$, $Y - M$, $Z - N$.

Pour que les deux surfaces fassent entre elles un angle φ, fixe, il faut

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - L^2 - M^2 - N^2 = \cos\varphi.$$

ou bien

$$X^2+Y^2+Z^2-L^2-M^2-N^2=\cos\varphi(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2);$$

c'est l'équation d'un complexe formé des tangentes à une sphère. Voici alors quelle sera la marche à suivre pour résoudre le problème : on cherchera les géodésiques non euclidiennes de cette sphère (ce sont encore des grands cercles); on prendra un système quelconque de ces géodésiques, ou même leurs tangentes; on déterminera par quadrature une surface normale (sens non euclidien) à ces droites. On aura ainsi la représentante. Il suffira alors d'intégrer l'équation de Moutard relative aux asymptotiques de cette représentante pour achever le problème.

Remarque. — Aux lignes asymptotiques de A_1 correspond sur la représentante un système conjugué. Ce système conjugué n'est pas quelconque, il est caractérisé par cette propriété que $X+L$, $Y+M$, $Z+N$ sont solutions d'une équation à invariants égaux. Dans le cas particulier où ce système conjugué est formé de lignes de courbure (sens non euclidien), on connaît par cela seul toute une série de représentantes de A_1 : c'est une série de surfaces parallèles (sens non euclidien). On aura donc une infinité de déformées de A_1 qui dépendent d'une constante arbitraire.

Pour étudier ce cas, on déduit des formules (6) (§ XVII, Ire Partie)

$$\frac{\partial(X+L)}{\partial u}=e(X_1+L_1)-a(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X+L)}{\partial v}=b(X_1+L_1)+f(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_1+L_1)}{\partial u}=-e(X+L)-m(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_1+L_1)}{\partial v}=-b(X+L)+n(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_2+L_2)}{\partial u}=a(X+L)+m(X_1+L_1),$$

$$\frac{\partial(X_2+L_2)}{\partial v}=-f(X+L)-n(X_1+L_1).$$

On en déduit que $X+L$, $Y+M$, $Z+N$ sont solutions :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial\theta}{\partial u} + Q\frac{\partial\theta}{\partial v} + R\theta,$$

où

$$P = \frac{m(b^2+f^2)+n(af-be)}{ab+ef},$$

$$Q = \frac{m(af-be)+n(a^2+e^2)}{ab+ef}.$$

La condition cherchée est

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{m(b^2+f^2)+n(af-be)}{ab+ef}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{m(af-be)+n(a^2+e^2)}{ab+ef}\right].$$

VIII. — Sur une transformation des couples de surfaces applicables.

Soient $S(X_1, X_2, X_3)$ et $S'(iX_4, iX_5, iX_6)$ deux surfaces applicables; de telle sorte que l'on a

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 + dX_5^2 + dX_6^2 = 0$$

ou

$$\Sigma\, dX^2 = 0.$$

Posons

$$\rho = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = \Sigma X^2.$$

Déterminons six quantités $x_1, x_2, \ldots, x_6$ par les formules

$$x = \frac{X}{\rho^2};$$

on aura alors

$$dx = \frac{\rho^2\, dX - 2\rho\, d\rho\, X}{\rho^4},$$

$$\Sigma\, dx^2 = \frac{1}{\rho^4}\Sigma\, dX^2 - \frac{4}{\rho^5}d\rho\,\Sigma X\, dX + \frac{4}{\rho^6}d\rho^2\,\Sigma X^2 = 0.$$

Les deux surfaces $\Sigma(x_1, x_2, x_3)$, $\Sigma'(ix_4, ix_5, ix_6)$ sont donc applicables. On a donc la construction suivante :

Soient M *et* M' *deux points correspondants de deux surfaces ap-*

plicables, O un point fixe; prenons sur OM *et* OM' *deux points* N *et* N', *tels que*

$$\frac{ON}{OM} = \frac{ON'}{OM'} = \frac{1}{\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2}.$$

Les points N *et* N' *décrivent deux surfaces applicables.*

Dans le cas particulier où $\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2$ est constant, la méthode donnerait des surfaces homothétiques.

Nous allons chercher ces surfaces. On peut supposer la constante $\rho = 1$. Posons alors

$$(1) \qquad x_1 = \frac{2X_1}{1+X_6}, \qquad x_2 = \frac{2X_2}{1+X_6}, \qquad \ldots, \qquad x_5 = \frac{2X_5}{1+X_6}.$$

On aura ensuite

$$r = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 4\,\frac{1-X_6}{1+X_6}.$$

Différentions totalement les formules (1). On aura

$$dx_i = 2\,\frac{(1+X_6)\,dX_i - X_i\,dX_6}{(1+X_6)^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

$$\begin{aligned}\Sigma\, dx_i^2 &= \frac{4}{(1+X_6)^4}\left[(1+X_6)^2\Sigma\, dX_i^2 + 2\,dX_6(1+X_6)\Sigma X_i\,dX_i + dX_6^2\Sigma X_i^2\right]\\ &= \frac{4}{(1+X_6)^4}\left[-dX_6^2(1+X_6)^2 + 2X_6(1+X_6)\,dX_6^2 + (1+X_6^2)\,dX_6^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'une développable; ix_4, ix_5 celles du point correspondant du plan.

On obtient ainsi tous les couples de surfaces applicables qui jouissent de la propriété suivante :

La différence des carrés des distances d'un point fixe aux deux points correspondants est constante.

Sur l'équilibre et les mouvements des mers [Deuxième Partie (¹)];

Par M. H. POINCARÉ.

8. — Mouvement relatif.

J'ai jusqu'ici négligé les effets de la rotation du Globe et de la force centrifuge composée; pour en tenir compte, je rappelle d'abord les principes fondamentaux de la dynamique des systèmes en mouvement relatif et plus généralement des systèmes où interviennent des forces gyrostatiques.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$ les $n+k$ coordonnées qui définissent la situation du système. En reprenant les notations du n° 5, les équations de Lagrange s'écriront

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i} - \frac{d\mathrm{T}}{dq_i} + \frac{d\mathrm{U}}{dq_i} = \mathrm{Q}_i. \tag{1}$$

Parmi les paramètres q, nous distinguerons :

1° $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que j'appellerai les q_a ou les paramètres à variation faible.

2° $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+k}$, que j'appellerai les q_b ou les paramètres à variation rapide.

Je supposerai que T et U sont indépendants des q_b, T dépendant

(¹) Voir même Volume, Fasc. I, p. 57.

seulement des q_b; et que $Q_b = 0$. L'équation de Lagrange devient alors

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_b} = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{dT}{dq'_b} = p_b,$$

p_b étant une constante.

Soit maintenant

$$H = T - U - \sum p_b q'_b.$$

Des équations (2) on peut tirer les q'_b en fonctions des q_a, des q'_a et des constantes p_b; et si l'on substitue dans H les valeurs ainsi trouvées, H n'est plus fonction que des q_a et des q'_a.

Pour éviter toute confusion je désignerai par des d ordinaires les dérivées prises par rapport aux q_a et aux q'_a en regardant les q'_b comme des variables indépendantes et par des ∂ ronds les dérivées prises par rapport aux q_a et aux q_a en regardant les q'_b comme des fonctions des q_a et des q'_a.

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_a} &= \frac{dT}{dq_a} - \frac{dU}{dq_a} + \sum \frac{dT}{dq'_b}\frac{\partial q_b}{\partial q_a} - \sum p_b \frac{\partial q_b}{\partial q_a},\\
\frac{\partial H}{\partial q'_a} &= \frac{dT}{dq'_a} \qquad\qquad + \sum \frac{dT}{dq'_b}\frac{\partial q'_b}{\partial q'_a} - \sum p_b \frac{\partial q'_b}{\partial q'_a}
\end{aligned}$$

ou, en vertu des équations (2),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q_a} &= \frac{dT}{dq_a} - \frac{dU}{dq_a},\\
\frac{\partial H}{\partial q'_a} &= \frac{dT}{dq'_a},
\end{aligned}$$

de sorte qu'avec les nouvelles variables les équations de Lagrange deviennent

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_a} - \frac{dH}{dq_a} = Q_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Si les forces extérieures sont nulles, ces équations se réduisent à

$$(3\,bis)\qquad \frac{d}{\partial t}\frac{\partial H}{\partial q'_a} - \frac{\partial H}{\partial q_a} = 0,$$

dont la signification est bien connue. Elles veulent dire que l'action hamiltonienne

$$\int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

doit être minimum.

Les équations ($3\,bis$) entraînent la suivante qui est l'équation de la conservation de l'énergie

$$-E = H - \sum \frac{\partial H}{\partial q'_a} q'_a = \text{const.}$$

Dans le problème qui nous occupe, nous aurons un seul paramètre à variation rapide q_b : c'est l'angle dont le globe solide terrestre a tourné autour de son axe à partir d'une certaine position prise pour origine; sa dérivée q'_b est sa vitesse angulaire de rotation. Nous aurons une infinité de paramètres à variation faible q_a qui définiront la position relative des particules liquides par rapport au globe solide.

T est un polynome homogène du deuxième degré par rapport aux q_a et aux q'_b ; U ne dépend pas de ces quantités; les $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ sont des polynomes homogènes du premier degré en q'_a et q'_b.

Les q'_b tirés des équations (2) sont des polynomes du premier degré non homogènes par rapport aux q'_a; H est donc un polynome du deuxième degré non homogène par rapport aux q'_a.

J'observe que H n'est déterminé qu'à une constante près, puisque cette fonction n'intervient que par ses dérivées; je puis donc, sans restreindre la généralité, supposer que H s'annule avec les q_a et les q'_a, de sorte que son développement suivant les puissances de ces quantités ne contiendra pas de termes de degré 0.

Je pourrai même, sans changer les équations (3), ajouter à H un terme de la forme Aq'_a, A étant un coefficient arbitraire; cela revient

en effet à ajouter à $\frac{\partial H}{\partial q'_a}$ la constante A; ce qui ne change pas

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'_a}.$$

Je puis donc encore, sans restreindre la généralité, supposer que, dans le développement de H, les termes du premier degré par rapport aux q' et de degré o par rapport aux q disparaissent.

Enfin je supposerai que les valeurs

$$q_a = 0, \qquad q'_a = 0$$

correspondent à une position d'équilibre stable; les équations (3 *bis*) se réduisent alors à

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = 0.$$

Ainsi les dérivées premières de H doivent s'annuler pour $q_a = q'_a = 0$; ce qui montre que le développement de H ne contient pas de termes du premier degré et commence par des termes du deuxième degré.

Quant aux termes de degré supérieur au second, nous pouvons les négliger parce que les q_a et les q'_a sont très petits. En définitive nous pouvons regarder H comme un polynome homogène du deuxième degré par rapport aux q_a et aux q'_a et nous écrirons

$$H = H_2 + 2H_1 + H_0.$$

H_2 sera du degré 2 par rapport aux q'_a et de degré o par rapport aux q_a.

H_1 sera du degré 1 par rapport aux q'_a et de degré 1 par rapport aux q_a.

H_0 sera du degré o par rapport aux q'_a et de degré 2 par rapport aux q_a.

L'énergie E sera alors évidemment égale à

$$E = H_2 - H_0.$$

Les équations (3) deviennent alors des équations linéaires à second

membre et à coefficients constants; et les équations (3 *bis*) sont les mêmes équations sans second membre.

Pour intégrer ces équations sans second membre, posons

$$q_a = \alpha_a e^{i\lambda t},$$

nous aurons n équations linéaires et homogènes par rapport aux n quantités $\alpha_a e^{i\lambda t}$; en écrivant que leur déterminant est nul, on obtiendra une équation de degré $2n$ en λ, qu'il s'agit d'étudier.

Cette équation a été étudiée d'une manière approfondie par Tait et Thomson dans leur *Traité de Philosophie naturelle*. De tous les résultats intéressants qu'ils ont obtenus au sujet de la réalité des racines, un seul nous est nécessaire.

Si les formes quadratiques H_2 et $-H_0$ sont définies positives (c'est le cas auquel nous aurons affaire) toutes les racines sont réelles.

9. — Étude des équations sans second membre.

Ces résultats bien connus étant rappelés, cherchons à étendre à ce problème ainsi généralisé les résultats du n° 5.

Le principe de la moindre action de Hamilton nous apprend que l'intégrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1} H\,dt$$

doit être minimum; à la condition que les q_a soient assujettis à avoir des valeurs données pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$.

Si cette condition n'était pas remplie, nous aurions

$$\delta J = \sum \left(\frac{dH}{dq'_a}\,\delta q_a\right)_{t=t_1} - \sum \left(\frac{dH}{dq'_a}\,\delta q_a\right)_{t=t_0}.$$

Si le mouvement est assujetti à être périodique de période $t_1 - t_0$ les expressions

$$q_a, \quad q'_a, \quad \frac{dH}{dq'_a}, \quad \delta q_a$$

reprendront les mêmes valeurs pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, et l'on aura

encore

$$\delta J = 0.$$

Ainsi l'intégrale J est encore minimum si le mouvement est assujetti à être périodique et si l'intégrale est étendue à une période entière.

Cela posé, soit

$$q_a = \alpha_a^{(k)} e^{i\lambda_k t}$$

une solution (imaginaire) des équations (3 *bis*) et

$$q_a = \beta_a^{(k)} e^{-i\lambda_k t}$$

la solution imaginaire conjuguée.

Si nous faisons

$$(4) \qquad q_a = \gamma_a e^{i\lambda_k t} + \delta_a e^{-i\lambda_k t},$$

l'intégrale J prise entre les limites $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{\lambda_k}$ devra être minimum (ou tout au moins sa première variation devra s'annuler) quand on y fera

$$\gamma_a = \alpha_a^{(k)}, \qquad \delta_a = \beta_a^{(k)}.$$

Voyons quelle est la valeur de cette intégrale. L'expression de H, quand on y substitue à la place des q_a leurs valeurs (4), se composera de trois termes : 1° un terme en $e^{2i\lambda_k t}$, qui sera homogène du deuxième degré par rapport aux γ_a ; 2° un terme indépendant de t, qui sera homogène du premier degré tant par rapport aux γ_a que par rapport aux δ_a ; 3° un terme en $e^{-2i\lambda_k t}$ qui sera homogène du second degré par rapport aux δ_a. Soient H′, H″, H‴ ces trois termes

$$H = H' + H'' + H'''.$$

Les intégrales de H′ et H‴ sont nulles ; de sorte que

$$J = \frac{2\pi}{\lambda_k} H''.$$

La variation $\delta H''$ de H'' doit donc être nulle, quand $\gamma_a = \alpha_a^{(k)}$, $\delta_a = \beta_a^{(k)}$.

Mais, à cause de la forme bilinéaire de H'', cela peut encore s'énoncer autrement :

H'' doit être nul quels que soient les γ_a quand on y fait $\delta_a = \beta_a^{(k)}$ et quels que soient les δ_a quand on y fait $\gamma_a = \alpha_a^{(k)}$.

Voyons quelle est la forme de H''.

Nous avons posé

$$H = H_2 + 2H_1 + H_0.$$

Nous devons remplacer les q_a par

$$\gamma_a e^{i\lambda_k t} + \delta_a e^{-i\lambda_k t}$$

et les q'_a par

$$i\lambda_k(\gamma_a e^{i\lambda_k t} - \delta_a e^{-i\lambda_k t}).$$

On voit que H_2 contiendra λ_k^2 en facteur et que H_1 contiendra λ_k. H est donc un polynome du deuxième degré en λ_k.

Nous devons ensuite conserver les termes indépendants de t; nous aurons alors

$$H'' = M_2\lambda_k^2 + 2i\lambda_k M_1 + M_0,$$

M_2, M_1 et M_0 étant des formes bilinéaires en γ_a et δ_a.

H'' ne doit pas changer quand on permute γ_a et δ_a et qu'on change λ_k en $-\lambda_k$.

On a donc

$$M_2(\gamma_a, \delta_a) = M_2(\delta_a, \gamma_a), \qquad M_0(\gamma_a, \delta_a) = M_0(\delta_a, \gamma_a),$$
$$M_1(\gamma_a, \delta_a) = -M_1(\delta_a, \gamma_a).$$

D'après ce que nous venons de voir, on doit avoir, quels que soient les δ_a,

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \delta_a) = 0.$$

On aura donc en particulier

$$(5) \quad \lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0$$

et de même

$$\lambda_m^2 M_2(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) + 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(m)}, \alpha_a^{(k)}) = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6)\quad \lambda_m^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) - 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_u^{(m)}) = 0.$$

Les deux relations (5) et (6) montrent que l'équation

$$(7)\qquad \lambda^2 M_2 + 2i\lambda M_1 + M_0 = 0$$

a pour racines

$$\lambda = \lambda_k, \qquad \lambda = -\lambda_m.$$

Reprenons l'équation des forces vives

$$H_2 - H_0 = \text{const.}$$

Cette équation doit être satisfaite en particulier quand on fait

$$q_a = \alpha_a^{(k)} e^{i\lambda_k t} + \alpha_a^{(m)} e^{i\lambda_m t}.$$

Le premier membre de l'équation des forces vives contient alors des termes en $e^{2i\lambda_k t}$, $e^{2i\lambda_m t}$, $e^{it(\lambda_k+\lambda_m)}$. Le coefficient de cette dernière exponentielle doit s'annuler à moins que

$$\lambda_k + \lambda_m = 0.$$

Supposons donc

$$(8)\qquad \lambda_k \gtrless -\lambda_m;$$

le coefficient de cette exponentielle est nul, ce qui entraîne l'égalité

$$(9)\qquad -\lambda\,\lambda_m M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) - M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0.$$

Nous pouvions le prévoir, car le produit $-\lambda_k\lambda_m$ des racines de (7) doit être égal à $\frac{M_0}{M_2}$.

Considérons quelques cas particuliers; si l'on fait $k = m$, l'équation (5), l'équation (6) et l'équation (9) se réduisent à

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(k)}) = 0.$$

Soit maintenant

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^{(m)} = \beta_a^{(k)};$$

l'équation (9) ne sera plus vraie, mais les équations (5) et (6) subsisteront et s'écriront

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) + 2i\lambda_k M_1(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) + M_0(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) = 0.$$

L'équation (7) a alors une racine égale à λ_k; mais sur l'autre racine nous ne savons rien.

Comme les $\alpha_a^{(k)}$ ne sont déterminés qu'à un facteur constant près, et que les β_a^k sont imaginaires conjuguées des α_a^k, nous pourrons supposer qu'on les a choisis de telle façon que

$$(10) \qquad \lambda_k^2 M_2(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) - M_0(\alpha_a^{(k)}, \beta_a^{(k)}) = I_k = \pm 1.$$

Un cas particulier qui a été traité à fond par Lord Kelvin est celui où les coefficients de H_1 sont très grands par rapport à ceux de H_0 et de H_2. Il y a rencontré des résultats analogues à ceux que nous venons de trouver dans le cas général et il serait intéressant de les déduire des résultats généraux.

Si H_1 est très grand, λ ne pourra être que très grand ou très petit. Supposons λ très grand; nous pourrons donc dans nos équations négliger M_0. Les équations (5) et (6) s'écrivent alors

$$\lambda_k M_2 + 2iM_1 = 0, \qquad \lambda_m M_2 - 2iM_1 = 0,$$

et l'on en déduit, si λ_k n'est pas égal à $-\lambda_m$,

$$M_2(\alpha_a^{(k)}, \alpha_a^{(m)}) = 0.$$

C'est l'équation de Lord Kelvin (Cf. Tait et Thomson, *Philosophie naturelle*, 3e édition, n° 345xv). On s'en rendra compte aisément.

Les deux auteurs anglais ont choisi des variables particulières de telle sorte que

$$H_2 = \sum \frac{q_a'^2}{2}.$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$\sum \alpha_i\,\alpha_a''' = 0.$$

10. — Étude des équations à second membre.

Revenons maintenant aux équations à second membre

$$\frac{d}{dt}\frac{dH}{dq_a} - \frac{dH}{dq_i} = Q_a.$$

Elles signifient que l'action doit être minimum, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad \int_{t_0}^{t} \left(\delta H + \sum Q_a\,\delta q_a\right) dt = 0.$$

Soit

$$Q_a = + r_a e^{i\lambda t} + s_a e^{-i\lambda t}.$$

On pourra satisfaire aux équations en posant

$$q_a = \alpha_a e^{i\lambda t} + \beta_a e^{-i\lambda t}$$

et l'équation (11) devra être satisfaite si, donnant aux q_a et aux Q_a ces valeurs, on fait

$$t_0 = 0, \qquad t_1 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\delta q_a = \gamma_a e^{i\lambda t} - \delta_a e^{-i\lambda t},$$

et cela quels que soient γ_a et δ_a.

Nous ferons en particulier

$$\gamma_a = 0, \qquad \delta_a = \alpha_a'$$

et l'équation (11) deviendra

$$(12)\qquad \lambda^2 M_2(\alpha_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\alpha_a, \alpha_a^k) + M_0(\alpha_a, \alpha_a^k) = -\sum r_a \alpha_a^k.$$

Des équations (12) on pourra tirer les α_a, et l'on tirerait de même les β_a des équations

$$(12\,bis)\qquad \lambda^2 M_2(\beta_a, \beta_a^k) - 2i\lambda M_1(\beta_a, \beta_a^k) + M_0(\beta_a, \beta_a^k) = -\sum s_a \alpha_a^k.$$

Étudions les équations (12); on voit qu'on peut en tirer les α_a et que ces quantités seront linéaires et homogènes par rapport aux r_a et rationnelles par rapport à λ. Considérons-les comme fonctions de λ.

1° Je vois d'abord que les α_a s'annuleront pour $\lambda = \infty$.

2° Les valeurs de λ pour lesquelles les α_a deviendront infinis seront celles pour lesquelles on pourra satisfaire aux n équations

$$(13)\qquad \left\{ \begin{array}{c} \lambda^2 M_2(\alpha_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\alpha_a, \alpha_a^k) + M_0(\alpha_a, \alpha_a^k) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

sans que les α_a s'annulent.

En annulant le déterminant des équations (13) on arrivera à une équation de degré $2n$ en λ; les valeurs cherchées sont donc au nombre de $2n$.

Or on satisfait à ces équations en faisant

$$\lambda = \lambda_m, \qquad \alpha_a = \alpha_a^m \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -\lambda_m, \qquad \alpha_a = \beta_a^m.$$

Les $2n$ infinis des fonctions α_a sont donc

$$\lambda = \pm\lambda_1, \qquad \lambda = \pm\lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \pm\lambda_n.$$

Il reste à chercher les résidus correspondants.

Posons donc

$$\alpha_a = \frac{\rho\,\alpha_a^m}{\lambda - \lambda_m} + \gamma_a,$$

il s'agit de déterminer ρ et les γ_a.

Nous avons pour cela les équations suivantes

$$\frac{\rho}{\lambda - \lambda_m}[\lambda^2 M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + M_0(\alpha_a^m, \alpha_a^k)]$$
$$+ [\lambda^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\gamma_a, \alpha_a^k) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^k)] = -\sum r_a \alpha_a.$$

ou en faisant tendre λ vers λ_m et tenant compte de la relation (6)

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &2\rho[\lambda_m M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) + iM_1(\alpha_a^m, \alpha_a^k)] \\ &\quad + [\lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \alpha_a^k) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^k)] = -\sum r_a \alpha_a^k. \end{aligned}\right.$$

Mais on a, quels que soient les γ_a,

$$\lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \alpha_a^m) - 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \alpha_a^m) + M_0(\gamma_a, \alpha_a^m) = 0,$$

ou bien encore, en changeant λ^m en $-\lambda^m$ et α_a^m en β_a^m,

$$(15)\quad \lambda_m^2 M_2(\gamma_a, \beta_a^m) + 2i\lambda_m M_1(\gamma_a, \beta_a^m) + M_0(\gamma_a, \beta_a^m) = 0.$$

Parmi les équations (14) nous distinguerons celle qui correspond à

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^k = -\beta_a^m;$$

elle se réduit à

$$(16)\qquad 2\rho[\lambda_m M_2(\alpha_a^m, \beta_a^m) + iM_1(\alpha_a^m, \beta_a^m)] = -\sum r_a \beta_a^m;$$

c'est de celle-là qu'on déduira ρ.

Mais à cause de (10) cela peut s'écrire

$$\rho = -I_m \lambda_m \sum r_a \beta_a^m.$$

Nous tirons de là

$$(17)\qquad \alpha_a = -\sum_{m=1}^{m=n} I_m \left(\frac{\alpha_a^m \lambda_m \Sigma_a r_a \beta_a^m}{\lambda - \lambda_m} - \frac{\beta_a^m \lambda_m \Sigma_a r_a \beta_a^m}{\lambda + \lambda_m} \right),$$

ou en posant

$$\sum r_a \beta_a^m = - B_m, \qquad \sum r_a \alpha_a^m = - A_m,$$

$$\alpha_a = \sum I_m \left(\frac{B_m \alpha_a^m \lambda_m}{\lambda - \lambda_m} - \frac{A_m \beta_a^m \lambda_m}{\lambda + \lambda_m} \right).$$

Développons α_a suivant les puissances croissantes de λ sous la forme

$$\alpha_a = \varepsilon_a^0 + \lambda \varepsilon_a^1 + \lambda^2 \varepsilon_a^2 + \ldots,$$

il viendra

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_a^0 = - \sum I_m (B_m \alpha_a^m + A_m \beta_a^m), & \varepsilon_a^1 = \sum I_m \frac{A_m \beta_a^m - B_m \alpha_a^m}{\lambda^m}, \\ \varepsilon_a^2 = - \sum I_m \frac{B_m \alpha_a^m + A_m \beta_a^m}{\lambda_m^2}, & \varepsilon_a^3 = \sum I_m \frac{A_m \beta_a^m - B_m \alpha_a^m}{\lambda_m^3}, \end{array} \right.$$

Posons maintenant

$$J_{p,q} = M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q); \qquad J'_{p,q} = M_1(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q); \qquad J''_{p,q} = M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^q),$$

on trouve immédiatement

$$(A) \quad J_{p,q} = J_{p,q}; \qquad J'_{p,q} = - J'_{p,q}; \qquad J''_{p,q} = J''_{p,q}; \qquad J'_{p,p} = 0.$$

Nous pourrons écrire les formules (18) sous la forme

$$(18\,bis) \qquad \varepsilon_a^p = - \sum{}' I_m \frac{B_m \alpha_a^m}{\lambda_m^p},$$

avec cette convention que le signe $\sum'$ ne porte pas comme $\sum$ sur n termes, mais sur $2n$ termes partagés en deux séries; pour la première série m varie de 1 à n; et l'on passe d'un terme de la première série au terme correspondant de la seconde en changeant λ_m en $-\lambda_m$, α_a^m et A_m en β_a^m et B_m réciproquement.

Il vient alors

$$J''_{p-1,q} = - \sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^{p-1}} M_2(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q),$$

$$J'_{p,q} = - \sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^p} M_1(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q),$$

$$J_{p+1,q} = - \sum{}' I_m \frac{B_m}{\lambda_m^{p+1}} M_0(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q).$$

On a d'autre part

$$\lambda_m^2 M_2(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) + 2i\lambda_m M_1(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) + M_0(\alpha_a^m, \varepsilon_a^q) = 0;$$

d'où

$$(19) \qquad J_{p-1,q} + 2iJ_{p,q} + J_{p+1,q} = 0.$$

On trouverait de même

$$(19\ bis) \qquad J_{p,q-1} - 2iJ_{p,q} + J_{p,q+1} = 0.$$

On trouvera une autre relation de la façon suivante; il vient

$$J_{p-1,q-1} = \sum{}'' \frac{B_m B_k}{\lambda_m^{p-1}\lambda_k^{q-1}} M_2(\alpha_a^m, \alpha_a^k) I_m I_k.$$

La somme $\sum''$ contient $4n^2$ termes, chacun des $2n$ termes de ε_a^{p-1} (expressions 18 *bis*) devant être combiné avec chacun des $2n$ termes de ε_a^{q-1}.

De même

$$J_{p,q} = \sum{}'' \frac{B_m B_k}{\lambda_m^p \lambda_k^q} M_0(\alpha_a^m, \alpha_a^k) I_m I_k.$$

Considérons la somme

$$J_{p-1,q-1} + J_{p,q}.$$

En vertu de l'équation (9) tous les termes de cette somme (qui sont au nombre de $4n^2$) disparaîtront à l'exception de ceux (au nombre de $2n$) qui sont tels que

$$\lambda_k = -\lambda_m, \qquad \alpha_a^k = \beta_a^m, \qquad B_k = A_m.$$

Il vient donc, en tenant compte de (10),

$$J_{p-1,q-1} + J_{p,q} = \sum{}' \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{p-q}} (-1)^q (M_0 - \lambda_m^2 M_2)$$
$$= (-1)^{q+1} \sum \frac{A_m B_m I_m}{\lambda_m^{p-q}}.$$

ou enfin (puisque les termes sont égaux deux à deux au signe près)

$$(20) \qquad J_{p-1,q+1} + J_{p,q} = (-1)^{q+1} \sum \frac{2 A_m B_m I_n}{\lambda_m^{p+q}},$$

si $p+q$ est pair et

$$(20\,bis) \qquad J'_{p-1,q+1} + J_{p,q} = 0,$$

si $p+q$ est impair.

L'expression $J_{p-1,q+1} + J_{p,q}$ ne dépend donc que de $p+q$ et de la parité de q; elle change de signe sans changer de valeur absolue, quand q augmente d'une unité et que p diminue d'une unité. On a donc la relation

$$J_{p-1,q} + J_{p+1,q} + J_{p,q-1} + J_{p,q+1} = 0$$

que l'on pourrait d'ailleurs obtenir en ajoutant (19) et (19 *bis*).

En faisant dans cette relation $q = p$, on trouve

$$2J_{p,p-1} + 2J_{p,p+1} = 0,$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (20 *bis*).

De (19) et (19 *bis*) on déduit encore

$$J_{p+1,q} + 2iJ'_{p,q} = J_{p-1,q+2} - 2iJ_{p+1,q-1}.$$

Toutes ces relations montrent que les fonctions $J_{p,q}$ ne sont pas indépendantes les unes des autres; considérons l'ensemble des fonctions J telles que $p+q \leq 2n$, des fonctions J′ telles que $p+q \leq 2n-1$ et des fonctions J″ telles que $p+q \leq 2n-2$; le nombre total de ces fonctions qui sont distinctes en tenant compte des relations (A) est de $2n^2 + (n+1)^2$. Le nombre des relations distinctes de la forme (19) est $n(2n-1)$: il reste donc seulement $n^2 + 3n + 1$ fonctions distinctes.

11. — Cas de l'équilibre stable.

Je vais me restreindre maintenant au cas où H_2 et $-H_0$ sont deux formes quadratiques définies positives, de sorte que l'équilibre reste stable, *même si l'on supprime les forces centrifuges composées.*

C'est évidemment le cas de la nature, dans le problème qui nous occupe.

Alors, d'après ce que nous avons vu plus haut, tous les λ_m sont réels.

Mais ce n'est pas tout : si γ_a et δ_a sont imaginaires conjugués, on a

$$M_2(\gamma_a, \delta_a) > 0, \qquad M_0(\gamma_a, \delta_a) < 0.$$

Il vient donc

$$\lambda_k^2 M_2(\alpha_a^k, \beta_a^k) - M_0(\alpha_a^k, \beta_a^k) > 0,$$

ce qui montre que tous les nombres que nous avons appelés I_k et I_m, et qui dans le cas général peuvent être égaux à $+1$ ou à -1, sont dans le cas qui nous occupe tous égaux à $+1$.

Toutes les formules qui précèdent se trouvent ainsi notablement simplifiées.

Il en résulte une série d'inégalités sur lesquelles il me reste à appeler l'attention.

Supposons en particulier que r_a soit réel ; c'est-à-dire que $r_a = s_a$ puisque r_a et s_a sont imaginaires conjugués.

Les quantités α_a^m, β_a^m sont imaginaires conjuguées, de même que r_a, s_a et que A_m, B_m.

Il en résulte que ε_a^p est réel si p est pair et purement imaginaire si p est impair.

On a donc, si p est pair,

$$M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) > 0, \qquad M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) < 0$$

et au contraire, si p est impair,

$$M_2(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) < 0, \qquad M_0(\varepsilon_a^p, \varepsilon_a^p) > 0.$$

c'est-à-dire que

$$(21) \qquad \begin{cases} J''_{p,p} > 0, & J_{p,p} < 0 \qquad (\text{pour } p \text{ pair}), \\ J''_{p,p} < 0, & J_{p,p} > 0 \qquad (\text{pour } q \text{ impair}). \end{cases}$$

Il est clair d'ailleurs qu'on aura dans tous les cas

$$J_{p,p} = 0.$$

Cela posé, reprenons l'équation (20) qui s'écrit maintenant (puisque $I_m = 1$)

$$(20) \qquad \frac{J'_{p-1,q-1} + J_{p,q}}{2} = (-1)^{q+1} \sum \frac{2 A_m B_m}{\lambda_m^{p+q}} \qquad (p+q \text{ pair}).$$

Si nous faisons $q = p$, il vient

$$(J'_{p-1,p-1} + J_{p,p})(-1)^{p+1} = 4 \sum \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}}.$$

Comme A_m et B_m sont imaginaires conjugués le second membre est positif, d'où l'on tire

$$J'_{p-1,p-1} + J_{p,p} < 0 \qquad (\text{si } p \text{ est pair}),$$
$$J''_{p-1,p-1} + J_{p,p} > 0 \qquad (\text{si } p \text{ est impair}).$$

Ces inégalités sont d'ailleurs des conséquences immédiates des inégalités (21).

Je poserai pour abréger

$$\frac{1}{4}(J'_{p-1,p-1} + J_{p,p})(-1)^{p+1} = \sum \frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}} = K_p > 0.$$

Cette valeur de K_p nous montre alors d'autres propriétés du nombre K_p qui font ressortir son analogie avec les intégraies J_{2p} envisagées dans la première Partie.

On trouve en effet

$$\frac{K_{p+1}}{K_p} < \frac{K_{p+2}}{K_{p+1}},$$

de sorte que le rapport $\frac{K_{p+2}}{K_p}$ va constamment en croissant : sa limite pour p infini est en général égale à la plus grande des valeurs de $\frac{1}{\lambda_m^2}$.

Si l'on a donc

$$\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \ldots < \lambda_n^2.$$

la limite de ce rapport sera $\frac{1}{\lambda_1^2}$:

A moins que A_1 (et par conséquent B_1) ne soient nuls, auquel cas cette limite serait égal à $\frac{1}{\lambda_2^2}$;

A moins que non seulement A_1 et B_1, mais encore A_2 et B_2 ne soient nuls, auquel cas la limite serait $\frac{1}{\lambda_3^2}$;

Et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons l'équation

$$(12)\qquad \lambda^2 M_2(\alpha_a, \alpha_a^k) + 2i\lambda M_1(\alpha_a, \alpha_a^k) + M_0(\alpha_a, \alpha_a^k) = -\sum r_a \alpha_a^k = A_k$$

qui doit être satisfaite par le développement

$$\alpha_a = \varepsilon_a^0 + \lambda\varepsilon_a^1 + \lambda^2\varepsilon_a^2 + \ldots.$$

On en déduira

$$(22)\qquad \begin{cases} M_0(\varepsilon_a^0, \alpha_a^k) = -\sum r_a \alpha_a^k, \\ M_0(\varepsilon_a^1, \alpha_a^k) = -2i M_1(\varepsilon_a^0, \alpha_a^k), \\ M_0(\varepsilon_a^2, \alpha_a^k) = -2i M_1(\varepsilon_a^1, \alpha_a^k) - M_2(\varepsilon_a^0, \alpha_a^k). \end{cases}$$

Les équations (22) nous donneront les $3n$ quantités

$$(23)\qquad \varepsilon_a^0, \quad \varepsilon_a^1, \quad \varepsilon_a^2.$$

On pourra donc former

$$J''_{00}, \quad J''_{11}, \quad J_{11}, \quad J_{22}$$

et par conséquent le rapport

$$-\frac{J''_{11}+J_{22}}{J''_{00}+J_{11}}=\frac{K_2}{K_1}.$$

Les quantités (23) sont des fonctions linéaires des n quantités r_a; K_2 et K_1 sont donc deux formes quadratiques définies positives par rapport aux r_a.

Les A_k sont des fonctions linéaires des r_a, mais à coefficients imaginaires; les B_k sont les formes imaginaires conjuguées des A_k.

Les r_a sont au nombre de n comme les A_k et les B_k; mais nous avons supposé les r_a réels tandis que les A_k et les B_k sont imaginaires.

Si donc nous donnons aux r_a des valeurs réelles quelconques, nous ne pouvons pas choisir ces valeurs de façon à donner aux A_k des valeurs imaginaires arbitraires; il doit donc y avoir n relations linéaires entre les n quantités A_k et les n quantités B_k; ou, si l'on aime mieux, entre les parties réelles et imaginaires des A_k (ces relations expriment d'ailleurs que la somme des résidus des fonctions α_a qui sont n fonctions rationnelles de λ; que cette somme, dis-je, est nulle).

En revanche, les produits $A_k B_k$, qui sont au nombre de n, sont réels et positifs; on peut donc choisir les r_a de façon qu'ils aient des valeurs réelles et positives, *arbitraires* en ce sens qu'elles ne sont assujetties à aucune égalité, mais *devant satisfaire à certaines inégalités.*

Cela ne me suffit pas encore pour mon objet; mais nous pouvons déjà en tirer certaines conséquences.

On a en effet

$$K_2=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^4},\qquad K_1=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^2},$$

ce qui nous montre que le rapport $\frac{K_2}{K_1}$ est toujours compris entre $\frac{1}{\lambda_1^2}$ et $\frac{1}{\lambda_n^2}$; nous avons donc déjà des inégalités auxquelles doivent satisfaire λ_1 et λ_n. Les mêmes considérations nous donneraient également des inégalités auxquelles devraient satisfaire les autres λ_m.

Au n° 5 nous avons montré que, pour le mouvement absolu, la détermination des λ_m se ramène à l'étude des variations du rapport de

deux formes quadratiques; ici l'étude d'un rapport analogue ne nous donne plus les λ_m, mais des limites supérieures ou inférieures de ces quantités.

Mais on peut aller plus loin; n'assujettissons plus les r_a à être réels, mais posons

$$r_a = \rho_a + i\lambda\sigma_a,$$

les ρ_a et les σ_a étant réels. Soient alors $\varepsilon_a'^k$ et $\varepsilon_a''^k$ ce que devient ε_a^k quand on y remplace r_a par ρ_a et par σ_a; il viendra évidemment

$$\alpha_a = (\varepsilon_a'^0 + \lambda\varepsilon_a'^1 + \ldots) + i\lambda(\varepsilon_a''^0 + \lambda\varepsilon_a''^1 + \ldots)$$

et par conséquent

$$\varepsilon_a^0 = \varepsilon_a'^0, \qquad \varepsilon_a^1 = \varepsilon_a'^1 + i\varepsilon_a''^0, \qquad \varepsilon_a^2 = \varepsilon_a'^2 + i\varepsilon_a''^1 + \ldots,$$

ce qui montre que ε_a^k est encore réel si k est pair et purement imaginaire si k est impair.

Je remarque que α_a est encore une fonction rationnelle de λ et que cette fonction conserve sa propriété essentielle, à savoir qu'elle ne change pas quand on change à la fois i en $-i$ et λ en $-\lambda$.

Ses infinis sont toujours $\pm\lambda_m$; si alors j'appelle $\lambda_m B_m \alpha_a^m$ le résidu relatif à λ_m, et $-\lambda_m A_m B_a^m$ le résidu relatif à $-\lambda_m$, il sera facile de voir :

1° Que A_m et B_m sont les mêmes pour tous les α_a et ne dépendent pas de l'indice a;

2° Que A_m et B_m sont imaginaires conjugués.

On n'a plus :

$$\sum r_a\beta_a^m = -B_m, \qquad \sum r_a\alpha_a^m = -A_m,$$

mais on a

$$-B_m = \sum \beta_a^m(\rho_a + i\lambda_m\sigma_a), \qquad -A_m = \sum \alpha_a^m(\rho_a - i\lambda_m\sigma_a).$$

En revanche, les formules (18) et toutes celles qui s'en déduisent

restent vraies de sorte que l'on a encore

$$\frac{1}{4}(J_{p-1,p-1}+J_{p,p})(-1)^{p+1}=\sum\frac{A_m B_m}{\lambda_m^{2p}}=K_p>0.$$

Les équations (22) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(22\,bis)\quad\begin{cases}M_0(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k)=-\sum\rho_a\alpha_a^k,\\ M_0(\varepsilon_a^1,\alpha_a^k)=-2iM_1(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k)-i\sum\sigma_a\alpha_a^k,\\ M_0(\varepsilon_a^2,\alpha_a^k)=-2iM_1(\varepsilon_a^1,\alpha_a^k)-M_2(\varepsilon_a^0,\alpha_a^k).\end{cases}$$

On tirera de là les $3n$ quantités (23) sous la forme de fonctions linéaires des ρ_a et des σ_a. Donc K_2 et K_1 seront des formes quadratiques définies positives des ρ_a et des σ_a.

Mais les ρ_a et les σ_a sont au nombre de $2n$; on pourra donc les choisir de telle façon que les A_m puissent prendre des valeurs imaginaires arbitraires et que les $A_m B_m=|A_m^2|$ prennent des valeurs réelles et positives *complètement arbitraires*.

Alors $\frac{1}{\lambda_n^2}$ sera le minimum du rapport $\frac{K_2}{K_1}$, et $\frac{1}{\lambda_1^2}$ en sera le maximum. Posons

$$\rho_a=\theta_1\rho_a^1+\theta_2\rho_a^2+\ldots+\theta_q\rho_a^q,$$
$$\sigma_a=\theta_1\sigma_a^1+\theta_2\sigma_a^2+\ldots+\theta_q\sigma_a^q.$$

Choisissons ensuite les θ pour que le rapport soit aussi petit que possible, en supposant les ρ_a^k et les σ_a^k donnés. Le rapport dépend encore des ρ_a^k et des σ_a^k et son maximum nouveau sera $\frac{1}{\lambda_q^2}$. En somme nous retrouvons tous les résultats du n° 5.

Avant d'aller plus loin, observons que les deux formes H_2 et H_0 jouent un rôle analogue; toute notre analyse subsisterait si nous changions H_2 en $-H_0$, M_2 en $-M_0$ et λ en $\frac{1}{\lambda}$.

12. — Problème du vase tournant.

Considérons un vase qui contient un liquide pesant, mais qui est assez petit pour que la pesanteur puisse être regardée comme constante en grandeur et en direction.

Ce vase est animé d'une vitesse de rotation uniforme Ω autour d'un axe parallèle à l'axe des z. La surface libre du liquide en équilibre n'est plus alors un plan horizontal, mais un paraboloïde de révolution.

Toutefois nous supposerons que Ω est assez petit pour que l'on puisse négliger Ω^2 qui entre en facteur dans la force centrifuge ordinaire, sans pouvoir négliger Ω qui entre en facteur dans la force centrifuge composée. A cette condition, nous pourrons regarder la surface libre comme un plan horizontal.

Du reste si l'on avait à tenir compte de Ω^2, il n'y aurait à faire subir aux résultats que quelques modifications très simples.

Il s'agit d'étudier les petites oscillations du liquide dans ce vase.

Pour cela nous allons voir comment les principes du n° 8 peuvent s'appliquer au mouvement relatif d'un système par rapport à des axes mobiles.

Soit un système formé de n points matériels

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n.$$

La masse du point m_i sera m_i; ses coordonnées par rapport aux axes mobiles seront

$$x_i, \quad y_i, \quad z_i$$

dans l'état d'équilibre, et

$$x_i + \xi_i, \quad y_i + \eta_i, \quad z_i + \zeta_i$$

dans l'état de mouvement.

Si les axes mobiles sont animés d'une vitesse de rotation Ω autour de l'axe des z, les projections de la vitesse *absolue* du point m_i sur les

trois axes mobiles seront

$$\frac{d\xi_i}{dt} - \Omega(y_i + \eta_i), \qquad \frac{d\eta_i}{dt} + \Omega(x_i + \xi_i), \qquad \frac{d\zeta_i}{dt}$$

et la force vive absolue du système sera

$$(1) \quad \begin{cases} \mathrm{T} = + \sum \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) + \Omega \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) \\ \qquad + \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{\Omega^2}{2}\sum m[(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2]. \end{cases}$$

Le premier terme représente la force vive relative, le second et le troisième représentent, au facteur près Ω, le moment de rotation dans le mouvement relatif; le dernier terme, qui contient en facteur Ω^2, est négligeable.

La vitesse angulaire Ω joue le rôle de q'_b, et l'on a, en négligeant dans T le terme en Ω^2,

$$p_b = \frac{d\mathrm{T}}{d\Omega} = \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) + \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right),$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} \mathrm{H} = \sum \frac{m}{2}\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} - \Omega \sum m\left(x\frac{d\eta}{dt} - y\frac{d\xi}{dt}\right) \\ \qquad - \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) - \mathrm{U}. \end{cases}$$

D'après une remarque faite au n° **8**, nous pouvons supprimer dans H les termes du premier degré par rapport aux q'_a qui sont représentés ici par le second terme de l'expression (2), de sorte qu'il reste

$$(3) \qquad \mathrm{H} = \sum \frac{m}{2}\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2} - \Omega \sum m\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right) - \mathrm{U},$$

d'où

$$\mathrm{H}_2 = \sum \frac{m}{2}\,\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2},$$

$$\mathrm{H}_1 = \Omega \sum m\left(\eta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\eta}{dt}\right),$$

$$\mathrm{H}_0 = -\mathrm{U}.$$

Pour passer au problème du liquide, où le nombre des molécules est infini, il suffit de remplacer les sommes par des intégrales et il vient

$$H_2 = \int \frac{d\tau}{2} \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2},$$

$$H_1 = \Omega \int d\tau \left(\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt} \right).$$

Les intégrations sont étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ du liquide.

Quant à la valeur de $H_0 = - U$, nous l'avons obtenue au n° 6; nous avons trouvé

$$H_0 = - U = - \int g \zeta^2 \frac{d\omega}{2},$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre. Les fonctions ξ, η, ζ sont assujetties à deux conditions :

1° On doit avoir l'équation de continuité

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0; \tag{4}$$

2° Sur la paroi du vase, on doit avoir

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \tag{5}$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la surface de la paroi.

On peut supposer, en outre, que les diverses molécules du fluide sont soumises à des forces extérieures et que le travail virtuel de ces forces pour des déplacements virtuels $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ des molécules est représenté par l'intégrale

$$\int d\tau (X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)$$

qui correspond ainsi à la somme que nous appelions dans les numéros précédents

$$\sum Q_a \,\delta q_a.$$

Il faut donc que l'on ait, en vertu du principe de Hamilton,

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H + \int d\tau(X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\delta\zeta)\right] = 0,$$

en supposant que $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont nuls pour $t = t_0$, $t = t_1$ et que ξ, η, ζ sont assujettis aux équations (4) et (5).

On peut écrire ceci sous une autre forme, en introduisant deux fonctions arbitraires ψ et θ,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H + \int d\tau \sum X\,\delta\xi + \int d\tau\,\psi \sum \frac{d\,\delta\xi}{dx}\right.\\ &\qquad\qquad \left. + \int d\omega'\,\theta(l\,\delta\xi + m\,\delta\eta + n\,\delta\zeta)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

La troisième intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la surface de la paroi dont les cosinus directeurs sont l, m, n.

Cette équation (6) est évidemment vraie, quelles que soient les fonctions ψ et θ si ξ, η et ζ sont assujetties aux conditions (4) et (5), et, en vertu des principes du calcul des variations, elle sera encore vraie, pour un choix convenable de ψ et de θ, sans que ξ, η, ζ soient assujetties à aucune condition.

On arrive ainsi aux équations du mouvement qu'on aurait pu obtenir directement et qui s'écrivent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\Omega\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = X,\\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2\Omega\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{dy} = Y,\\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} \qquad\qquad\quad + \frac{d\psi}{dz} = Z, \end{aligned}\right.$$

à l'intérieur du vase;

$$\psi = -\,g\zeta,$$

à la surface libre.

Je prends le signe $-$ devant $g\zeta$ dans la dernière de ces équations, parce que je considère l'axe des z positifs, comme dirigé vers le bas.

Ces équations, jointes à (4) et à (5), définiront les quatre fonctions ξ, η, ζ, ψ.

Supposons, en particulier, que ces quatre fonctions soient proportionnelles à $e^{i\lambda t}$, nos équations deviendront

$$(7\,bis)\quad \begin{cases} -\lambda^2\xi + 2i\Omega\lambda\eta + \dfrac{d\psi}{dx} = \mathrm{X}, \\ -\lambda^2\eta - 2i\Omega\lambda\xi + \dfrac{d\psi}{dy} = \mathrm{Y}, \\ -\lambda^2\zeta \qquad\qquad\quad + \dfrac{d\psi}{dz} = \mathrm{Z}, \end{cases}$$

à l'intérieur du vase;

$$\psi = -g\zeta,$$

à la surface libre.

13. — Développement en série.

L'élimination de ψ entre les équations ($7\,bis$) nous conduit aux équations suivantes :

$$(7\,ter)\quad \begin{cases} -\lambda^2\left(\dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dy}\right) - 2i\Omega\lambda\dfrac{d\xi}{dz} = \dfrac{d\mathrm{Y}}{dz} - \dfrac{d\mathrm{Z}}{dy}, \\ -\lambda^2\left(\dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz}\right) - 2i\Omega\lambda\dfrac{d\eta}{dz} = \dfrac{d\mathrm{Z}}{dx} - \dfrac{d\mathrm{X}}{dz}, \\ -\lambda^2\left(\dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx}\right) - 2i\Omega\lambda\dfrac{d\zeta}{dz} = \dfrac{d\mathrm{X}}{dy} - \dfrac{d\mathrm{Y}}{dx} \end{cases}$$

à l'intérieur du vase;

$$(8)\quad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta}{dx} = \mathrm{X} + \lambda^2\xi - 2i\Omega\lambda\eta, \\ -g\dfrac{d\zeta}{dy} = \mathrm{Y} + \lambda^2\eta + 2i\Omega\lambda\xi, \end{cases}$$

$$\int \zeta\, d\omega = 0$$

à la surface libre.

La troisième équation (8) est une conséquence immédiate de (4) et de (5).

Supposons maintenant que l'on ait

$$X = X_0 + \lambda X_1, \qquad Y = Y_0 + \lambda Y_1, \qquad Z = Z_0 + \lambda Z_1$$

et que

$$X_0\,dx + Y_0\,dy + Z_0\,dz$$

soit une différentielle exacte.

Développons ξ, η, ζ suivant les puissances croissantes de λ, de telle sorte que l'on ait, par exemple,

$$\xi = \Sigma \lambda^n \xi_n.$$

Alors les équations (7 *ter*) et (8) nous donnent, en égalant les coefficients des puissances semblables de λ :

Premier groupe.

$$(7\,a) \quad \left\{ \begin{aligned} -2i\Omega \frac{d\xi_0}{dz} &= \frac{dY_1}{dz} - \frac{dZ_1}{dy}, \\ -2i\Omega \frac{d\eta_0}{dz} &= \frac{dZ_1}{dx} - \frac{dX_1}{dz}, \\ -2i\Omega \frac{d\zeta_0}{dz} &= \frac{dX_1}{dy} - \frac{dY_1}{dx} \end{aligned} \right.$$

à l'intérieur du vase;

$$(4\,a) \qquad \frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dy} + \frac{d\zeta_0}{dz} = 0$$

à l'intérieur du vase;

$$(5\,a) \qquad l\xi_0 + m\eta_0 + n\zeta_0 = 0$$

pour la paroi;

$$(8\,a) \qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy} = X_0, \qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy} = Y_0,$$

$$\int \zeta_0\,d\omega = 0$$

pour la surface libre.

Deuxième groupe.

$$(7\,b)\qquad -2i\Omega\frac{d\xi_1}{dz} = \frac{d\eta_0}{dz} - \frac{d\zeta_0}{dy}$$

et deux équations qu'on en déduit par symétrie;

$$(4\,b)\qquad \frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy} + \frac{d\zeta_1}{dz} = 0,$$

$$(5\,b)\qquad l\xi_1 + m\eta_1 + n\zeta_1 = 0;$$

$$(8\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} -g\frac{d\zeta_1}{dx} &= X_1 - 2i\Omega\eta_0,\\ -g\frac{d\zeta_1}{dy} &= Y_1 + 2i\Omega\xi_0,\end{aligned}\right.$$

$$\int \zeta_1\,d\omega = 0.$$

Troisième groupe $(n > 0)$.

$$(7\,c)\qquad -2i\Omega\frac{d\xi_{n+1}}{dz} = \frac{d\eta_n}{dz} - \frac{d\zeta_n}{dy}$$

et deux équations qu'on en déduit par symétrie,

$$(4\,c)\qquad \frac{d\xi_{n+1}}{dx} + \frac{d\eta_{n+1}}{dy} + \frac{d\zeta_{n+1}}{dz} = 0,$$

$$(5\,c)\qquad l\xi_{n+1} + m\eta_{n+1} + n\zeta_{n+1} = 0.$$

$$(8\,c)\qquad \left\{\begin{aligned} -g\frac{d\zeta_{n+1}}{dx} &= \xi_{n-1} - 2i\Omega\eta_n,\\ -g\frac{d\zeta_{n+1}}{dy} &= \eta_{n-1} + 2i\Omega\xi_n,\end{aligned}\right.$$

$$\int \zeta_n\,d\omega = 0.$$

Voyons comment ces trois groupes d'équations vont nous permettre de déterminer par récurrence toutes nos inconnues :

1° Les équations $(7\,a)$ déterminent ξ_0 à une fonction inconnue près de x et de y; les équations $(8\,a)$ achèvent ensuite la détermination

de ζ_0. Ces deux équations ($8a$) sont compatibles, parce que

$$X_0\, dx + Y_0\, dy$$

est pour $z = 0$ une différentielle exacte;

2° Pour achever la détermination de ξ_0 et η_0, nous devons nous servir des équations ($4a$) et ($5a$). Ces équations nous font connaître

$$\frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dy} \quad \text{et} \quad l\xi_0 + m\eta_0,$$

puisque ζ_0 est entièrement déterminé. D'autre part, ξ_0 et η_0 sont définis à deux fonctions arbitraires près de x et de y; c'est-à-dire que l'on a

$$\xi_0 = \xi'_0 + \xi''_0, \qquad \eta_0 = \eta'_0 + \eta''_0,$$

ξ'_0 et η'_0 étant entièrement connus, pendant que ξ''_0 et η''_0 ne dépendent que de x et de y. Les équations ($4a$) et ($5a$) peuvent alors s'écrire

$$(9a) \qquad \frac{d\xi''_0}{dx} + \frac{d\eta''_0}{dy} = \varphi, \qquad l\xi''_0 + m\eta''_0 + n\theta = 0,$$

φ et θ étant deux fonctions connues de x et de y.

Ces équations ne sont pas toujours compatibles. Soit, en effet,

$$z = h(x, y)$$

l'équation de la paroi du vase. Les cosinus directeurs l, m, n sont proportionnels à

$$\frac{dh}{dx}, \quad \frac{dh}{dy}, \quad -1,$$

de sorte que la seconde équation ($9a$) peut s'écrire

$$\xi''_0 \frac{dh}{dx} + \eta''_0 \frac{dh}{dy} = \theta.$$

Soit alors $F(h)$ une fonction de h qui s'annule pour $h = 0$; on aura

$$\int dx\, dy \left[\frac{d\xi''_0\, F(h)}{dx} + \frac{d\eta''_0\, F(h)}{dy} \right] = 0,$$

l'intégration étant étendue à toute la surface du vase, puisque sur le bord du vase $F(h)$ s'annule.

Cela peut s'écrire, en tenant compte des équations (9 a),

$$(10\,a) \qquad \int dx\,dy\,[F(h)\varphi + F'(h)\theta] = 0.$$

Il faut donc que X_1, Y_1, Z_1 satisfassent à certaines conditions que je n'écrirai pas.

Supposons la condition (10 a) satisfaite; je dis qu'elle sera suffisante pour que l'on puisse déterminer ξ''_0 et η''_0, de façon à satisfaire aux équations (9 a).

Nous pouvons, en effet, toujours trouver deux fonctions $\xi^{\cdot}_0$ et $\eta^{\cdot}_0$ qui satisfassent à la première des équations (9 a)

$$\frac{d\xi^{\cdot}_0}{dx} + \frac{d\eta^{\cdot}_0}{dy} = \varphi.$$

Cela peut se faire d'une infinité de manières; on peut, par exemple, prendre

$$\eta^{\cdot}_0 = 0, \qquad \xi^{\cdot}_0 = \int_0^x \varphi\,dx.$$

On aura ensuite

$$\xi''_0 = \xi^{\cdot}_0 - \frac{d\psi}{dy}, \qquad \eta''_0 = \eta^{\cdot}_0 + \frac{d\psi}{dx},$$

ψ étant une fonction auxiliaire.

La seconde équation (9 a) montre ensuite que ψ doit satisfaire à une équation de la forme

$$(9\,a\,bis) \qquad \frac{d\psi}{dx}\frac{dh}{dy} - \frac{dh}{dx}\frac{d\psi}{dy} = \theta^{\cdot},$$

$\theta^{\cdot}$ étant une fonction connue de x et de y. En vertu de (10 a), on aura

$$(10\,a\,bis) \qquad \int dx\,dy\,F'(h)\theta^{\cdot} = 0.$$

Prenons alors un système particulier de coordonnées qui compren-

dra la variable h et une variable s qui variera de o à 2π quand on fera le tour de l'une des courbes fermées $h=$ const. Soit J le jacobien ou déterminant fonctionnel de x et de y par rapport à s et à h. Les équations (9 *a bis*) et (10 *a bis*) deviendront

$$(9\,a\,ter)\qquad \frac{d\psi}{ds} = \mathrm{J}\theta^*,$$

$$(10\,a\,ter)\qquad \int\int \mathrm{F}'(h)\mathrm{J}\theta^*\,dh\,ds = 0.$$

L'équation (10 *a ter*) ayant lieu, quel que soit $\mathrm{F}'(h)$, nous pourrons écrire

$$(10\,a\,quater)\qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{J}\theta^*\,ds = 0.$$

L'équation (9 *a ter*) nous donne

$$\psi = \int_0^s \mathrm{J}\theta^*\,ds + \text{fonction arbitraire de } h.$$

Mais, pour que cette fonction soit uniforme, il faut et il suffit que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{J}\theta^*\,ds = 0.$$

Or cette condition est remplie en vertu de l'équation (10 *a quater*).

3° La fonction ψ n'est encore déterminée qu'à une fonction arbitraire près de h que j'appellerai $f(h)$; si cette fonction $f(h)$ était connue, les équations (7 b) et (8 b) détermineraient ζ_1 complètement et ξ_1 et η_1 à des fonctions arbitraires près de x et de y. Il est aisé de vérifier que les équations (8 b) sont toujours compatibles.

4° Il faudrait ensuite achever la détermination de ξ_1 et η_1 à l'aide de (4 b) et (5 b); pour cela posons

$$\xi_1 = \xi'_1 + \xi''_1, \qquad \eta_1 = \eta'_1 + \eta''_1,$$

ξ'_1 et η'_1 étant entièrement connues, tandis que ξ''_1 et η''_1 ne dépendent que de x et de y.

Nous arriverons à des équations de même forme que $(9a)$ qui s'écriront

$$(9b)\qquad \frac{d\xi''_1}{dx}+\frac{d\eta''_1}{dy}=\varphi_1,\qquad \xi''_1\frac{dh}{dx}+\eta''_1\frac{dh}{dy}=\theta_1,$$

où φ_1 et θ_1 sont deux fonctions connues. Pour que ces équations soient compatibles, on devra avoir

$$(10b)\qquad \int dx\,dy[\mathrm{F}(h)\varphi_1+\mathrm{F}'(h)\theta_1]=0.$$

5° J'ai dit que ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dz}$, $\frac{d\eta_1}{dz}$, φ_1 et θ_1 étaient des fonctions connues, *mais en supposant que la fonction $f(h)$ soit connue elle-même.*

Je vais maintenant me servir de l'équation $(10b)$ pour achever la détermination de $f(h)$.

Nous connaissons complètement ζ_0, $\frac{d\xi_0}{dz}$, $\frac{d\eta_0}{dz}$; il en résulte que $\frac{d\xi_1}{dz}$ et $\frac{d\eta_1}{dz}$ sont aussi entièrement connus; au contraire, $\frac{d\zeta_1}{dz}$ n'est pas complètement déterminé, parce que $\frac{d\xi_0}{dy}-\frac{d\eta_0}{dx}$ ne l'est pas.

ξ_0 est déterminé au terme près $-f'(h)\frac{dh}{dy}=-\frac{df(h)}{dy}$ et η_0 au terme près $f'(h)\frac{dh}{dx}=\frac{df(h)}{dx}$. Il en résulte que $\frac{d\zeta_1}{dz}$ sera déterminé au terme près

$$\frac{1}{2i\Omega}\Delta f(h).$$

La valeur de ζ_1 pour $z=0$ nous est donnée par les équations $(8b)$; mais comme ξ_0 et η_0 ne sont pas entièrement déterminés, ces équations nous montrent que $\frac{d\zeta_1}{dx}$ et $\frac{d\zeta_1}{dy}$ sont déterminés à des termes près en

$$+\frac{2i\Omega}{g}\frac{df(h)}{dx},\qquad +\frac{2i\Omega}{g}\frac{df(h)}{dy}$$

et, par conséquent, ζ_1 à un terme près en

$$+\frac{2i\Omega}{g}f(h),$$

en supposant, ce qui est permis,

$$\int f(h)\, d\omega = 0.$$

La valeur de ζ_1 pour $z = h$ est alors déterminée à un terme près en

$$\frac{h}{2i\Omega}\Delta f(h) + \frac{2i\Omega}{g} f(h)$$

et l'équation ($10\, b$) prend la forme

$$(10\, b\, bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \int dx\, dy \Big[& - F(h)\Delta f(h) \\ & + F'(h)\Big(h\Delta f - \frac{4\Omega^2 f}{g}\Big)\Big] = \text{expression connue}, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(10\, b\, ter) \quad \left\{ \begin{aligned} \int J\, dh\, ds \Big[& (hF' - F)(f'\Delta h + f'' Dh) \\ & - \frac{4\Omega^2 F' f}{g} \Big] = \text{expression connue}, \end{aligned} \right.$$

où j'ai posé pour abréger

$$Dh = \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dy}\right)^2.$$

En intégrant par partie et remarquant que $F(h)$ s'annule pour $h = 0$, on trouve

$$-\int dx\, dy\, F(h)\Delta f(h) = \int dx\, dy\, F'(h) f'(h)\, Dh;$$

de sorte que l'équation ($10\, b\, ter$) devient

$$\int J F'\, dh\, ds\Big(h f' \Delta h + h f'' Dh + f' - \frac{4\Omega^2 f}{g}\Big) = \text{expression connue}.$$

La fonction F' étant connue, on peut tirer de là l'équation différentielle qui définira la fonction f.

Soit, en effet,

$$A = \int_0^{2\pi} J\, Dh\, ds, \qquad B = \int_0^{2\pi} J\, \Delta h\, ds, \qquad C = \int_0^{2\pi} J\, ds;$$

A, B, C sont des fonctions connues de h.

Notre équation différentielle s'écrit alors

$$(11) \qquad Ahf'' + f'(Bh + C) + KCf = E,$$

E étant une quatrième fonction connue de h.

C'est là une équation différentielle du deuxième ordre qui ne détermine la fonction f qu'à deux constantes arbitraires près.

Voyons comment on peut déterminer ces constantes.

Je supposerai que la fonction h n'a qu'un seul maximum que j'appellerai h_0, de telle façon que les courbes $h =$ const. soient des courbes fermées s'enveloppant mutuellement. C'est d'ailleurs ce que j'ai déjà supposé implicitement en prenant les variables h et s.

Cela posé, j'observe que J s'annule, ainsi que Dh, pour $h = h_0$. Il en résulte que A, B, C et E s'annulent également et il en est de même de $\frac{A}{C}$, tandis que $\frac{B}{C}$ reste fini et qu'il en est de même, en général, de $\frac{E}{C}$.

Si j'écris l'équation (11) sous la forme

$$\frac{A}{C} hf'' + f'\left(h\frac{B}{C} + 1\right) + Kf = \frac{E}{C},$$

je vois que le coefficient de f'' s'annule deux fois : pour $h = 0$ et pour $h = h_0$.

Il en résulte que pour $h = 0$, par exemple, l'intégrale générale de l'équation (11) devient infinie, ou du moins que ses dérivées d'ordre suffisamment élevé deviennent infinies.

Si donc on veut que f reste fini pour $h = 0$, ainsi que toutes ses dérivées, il faudra assujettir les deux constantes d'intégration à une certaine relation.

De même si l'on veut que f reste fini pour $h = h_0$, ainsi que toutes

ses dérivées, il faudra assujettir les deux constantes d'intégration à une seconde relation.

Ces constantes devant ainsi satisfaire à deux relations seront entièrement déterminées.

La fonction f est donc déterminée complètement, ainsi que ξ_0, η_0, ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dz}$, $\frac{d\eta_1}{dz}$, φ_1 et θ_1.

6° Les fonctions φ_1 et θ_1 ainsi déterminées satisfont à la condition (10 b); on déterminera ξ_1'' et η_1'' par les équations (9 b); ce qui nous fera connaître ξ_1 et η_1, non pas complètement, mais à des termes près en

$$-f_1'(h)\frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad f_1'(h)\frac{dh}{dx},$$

$f_1(h)$ étant une nouvelle fonction arbitraire de h.

7° Nous formerons une équation (10 c) avec (4 c) et (5 c) de la même manière que nous avons formé (10 a) avec (4 a) et (5 a) et (10 b) avec (4 b) et (5 b); traitant ensuite (10 c) comme nous venons de traiter (10 b), nous déterminerons $f_1(h)$. La détermination de ξ_1, η_1 et ζ_1 sera ainsi achevée.

8° Par les équations (7 c) et (8 c) nous déterminerons

$$\zeta_2, \quad \frac{d\xi_2}{dz}, \quad \frac{d\eta_2}{dz}.$$

9° La condition (10 c) étant remplie, les équations (4 c) et (5 c) sont compatibles. Elles nous donneront ξ_2 et η_2 à des termes près en

$$-f_2'(h)\frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad f_2'(h)\frac{dh}{dx},$$

$f_2(h)$ étant une nouvelle fonction arbitraire.

10° On déterminera $f_2(h)$ comme on a déterminé $f(h)$ et $f_1(h)$. La détermination de ξ_2, η_2, ζ_2 sera alors terminée.

Et ainsi de suite.

Nous avons dû supposer plus haut que non seulement X_0, Y_0, Z_0, mais X_1, Y_1, Z_1 doivent satisfaire à certaines relations. La généralité se trouverait ainsi restreinte, et pour éviter cela nous poserons non

plus

$$X = X_0 + \lambda X_1,$$

mais

$$X = X_0 + \lambda X_1 + \lambda^2 X_2, \qquad Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2, \qquad \ldots.$$

Nos équations doivent alors être modifiées.

Dans l'équation (7 *b*) on doit ajouter un second membre $\frac{dY_2}{dz} - \frac{dZ_2}{dy}$ et il faut modifier de même les autres équations déduites de (7 *b*) par symétrie.

Les équations (8 *c*) doivent également être modifiées pour $n = 1$ et l'on doit les écrire

$$-g\frac{d\zeta_2}{dx} = \xi_0 - 2i\Omega\eta_1 + X_2,$$

$$-g\frac{d\zeta_2}{dy} = \eta_0 + 2i\Omega\xi_1 + Y_2.$$

Tout ce que nous avons dit subsiste d'ailleurs et les fonctions X_2, Y_2, Z_2 peuvent être quelconques.

Nous avons ainsi le moyen de développer ξ, η, ζ suivant les puissances de λ; mais le domaine de convergence est évidemment limité.

C'est ici qu'on peut appliquer les principes du n° **11**.

Nous avons vu que dans le cas où il y a un nombre fini de degrés de liberté, les quantités q_a (qui sont analogues à ξ, η, ζ) sont des fonctions rationnelles de λ, dont les infinis sont les quantités $\pm\lambda_m$.

Ici, le nombre des degrés de liberté étant illimité, ξ, η, ζ seront des fonctions uniformes (et très probablement méromorphes) de λ. En multipliant le développement de ξ suivant les puissances de λ par un polynome tel que le suivant

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)\ldots(\lambda^2 - \lambda_{m-1}^2)(\lambda^2 - \lambda_m^2),$$

on étendra donc beaucoup l'étendue du domaine de convergence (il est même probable qu'on pourra l'étendre indéfiniment) et, d'ailleurs, on augmentera la rapidité de la convergence.

De là l'intérêt qui s'attache à la détermination des λ_m. Nous avons

vu que cette détermination pouvait reposer sur la considération du rapport $\frac{k_{p-1}}{k_p}$; ici ce rapport s'écrit, en faisant, par exemple, $p=3$,

$$(12) \qquad \frac{-\int d\tau(\xi_3^2+\eta_3^2+\zeta_3^2)+g\int \zeta_4^2\,d\omega}{\int d\tau(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-g\int \zeta_3^2\,d\omega}.$$

J'observe que ce rapport est essentiellement positif. En effet, si nous supposons, comme il convient, X_0, Y_0, Z_0, X_2, Y_2, Z_2 réels, X_1, Y_1, Z_1 purement imaginaires; il arrivera que ξ_2, η_2, ζ_2, ξ_4, η_4, ζ_4 seront réels, tandis que ξ_3, η_3, ζ_3 seront purement imaginaires

Les fonctions ξ_n, η_n, ζ_n dépendent évidemment du choix de X, Y, Z; supposons donc qu'on choisisse X, Y, Z, de façon que le rapport $\frac{k_2}{k_3}$ soit maximum. Le maximum ainsi obtenu, que j'appellerai le *premier maximum*, est précisément $\frac{1}{\lambda_1^2}$.

Soit maintenant

$$\begin{aligned}
X &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_p A_p,\\
Y &= \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \ldots + \alpha_p B_p,\\
Z &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_p C_p,
\end{aligned}$$

les α étant des coefficients indéterminés, les A, B, C étant des fonctions quelconques de x, y, z.

Les fonctions A, B, C étant d'abord supposées données, choisissons les coefficients α, de telle façon que le rapport (12) soit minimum. Soit R le minimum ainsi obtenu. Ce minimum R dépend du choix des fonctions A, B, C; choisissons ces fonctions de telle façon que R soit maximum. Le maximum ainsi obtenu sera ce que j'appellerai le $p^{\text{ième}}$ *maximum* du rapport (12); il sera égal à $\frac{1}{\lambda_p^2}$.

Tout est donc ramené à l'étude des maxima successifs du rapport (12).

14. — Cas d'une profondeur très petite.

Tout ce qui précède est susceptible d'importantes simplifications, quand la profondeur du vase est infiniment petite.

Nous pouvons alors développer toutes nos quantités suivant les puissances croissantes de z et négliger le carré de z. Nous aurons alors

$$\xi = \xi' + z\xi'', \qquad \eta = \eta' + z\eta'', \qquad \zeta = \zeta' + z\zeta'',$$
$$X = X' + zX'', \qquad Y = Y' + zY'', \qquad Z = Z' + zZ'',$$

ξ', ξ'', ..., X', X'', ..., étant des fonctions de x et de y.

La troisième équation (7 *ter*) devient alors

$$-\lambda^2\left(\frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx}\right) - 2i\Omega\lambda\zeta'' = \frac{dX'}{dy} - \frac{dY'}{dx},$$

Les équations (8) deviennent

$$-g\frac{d\zeta'}{dx} = X' + \lambda^2\xi' - 2i\Omega\lambda\eta',$$
$$-g\frac{d\zeta'}{dy} = Y' + \lambda^2\eta' + 2i\Omega\lambda\xi',$$
$$\int \zeta'\,d\omega = 0.$$

D'autre part (4) nous donne (en négligeant les termes en z devant ceux qui ne contiennent pas z)

$$\frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \zeta'' = 0$$

et (5) devient, en négligeant les termes en z^2, zh, ...,

$$\xi'\frac{dh}{dx} + \eta'\frac{dh}{dy} = \zeta' + h\zeta''.$$

En éliminant ζ'' entre ces équations, nous trouvons

$$-\lambda^2\left(\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx}\right)+2i\Omega\lambda\left(\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\eta'}{dy}\right)=\frac{dX'}{dy}-\frac{dY'}{dx},$$

$$\frac{d(h\xi')}{dx}+\frac{d(h\eta')}{dy}=\zeta''.$$

Je transcris ces équations en supprimant les accents devenus inutiles,

$$(1)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta}{dx}=X+\lambda^2\xi-2i\Omega\lambda\eta, \\ -g\dfrac{d\zeta}{dy}=Y+\lambda^2\eta+2i\Omega\lambda\xi, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \int\zeta\,d\omega=0,$$

$$(3)\qquad -\lambda^2\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)+2i\Omega\lambda\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)=\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx},$$

$$(4)\qquad \frac{d(h\xi)}{dx}+\frac{d(h\eta)}{dy}=\zeta.$$

Développons maintenant toutes ces expressions suivant les puissances de λ et soit

$$X=X_0+\lambda X_1+\lambda^2 X_2,\qquad Y=Y_0+\lambda Y_1+\lambda^2 Y_2,$$
$$\xi=\xi_0+\lambda\xi_1+\lambda^2\xi_2+\ldots+\lambda^n\xi_n+\ldots,$$
. . . .

Nous arriverons à la série d'équations suivantes :

Premier groupe.

$$(1a)\qquad -g\frac{d\zeta_0}{dx}=X_0,\qquad -g\frac{d\zeta_0}{dy}=Y_0,$$

$$(2a)\qquad \int\zeta_0\,d\omega=0$$

$\left(\text{avec la condition } \dfrac{dX_0}{dy}=\dfrac{dY_0}{dx}\right)$,

$$(3a)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_0}{dx}+\frac{d\eta_0}{dy}\right)=\frac{dX_1}{dy}-\frac{dY_1}{dx},$$

$$(4a)\qquad \frac{dh\xi_0}{dx}+\frac{dh\eta_0}{dy}=\zeta_0.$$

Deuxième groupe.

$$(1\,b)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_1}{dx} = X_1 - 2i\Omega\eta_0, \\ -g\dfrac{d\zeta_1}{dy} = Y_1 + 2i\Omega\xi_0, \end{cases}$$

$$(2\,b)\qquad \int \zeta_1\, d\omega = 0,$$

$$(3\,b)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_1}{dx} + \frac{d\eta_1}{dy}\right) = \frac{dX_2}{dy} - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d\xi_0}{dy} - \frac{d\eta_0}{dx},$$

$$(4\,b)\qquad \frac{dh\xi_1}{dx} + \frac{dh\eta_1}{dy} = \zeta_1.$$

Troisième groupe.

$$(1\,c)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_2}{dx} = X_2 - 2i\Omega\eta_1 + \xi_0, \\ -g\dfrac{d\zeta_2}{dy} = Y_2 + 2i\Omega\xi_1 + \eta_0, \end{cases}$$

$$(2\,c)\qquad \int \zeta_2\, d\omega = 0,$$

$$(3\,c)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_2}{dx} + \frac{d\eta_2}{dy}\right) = \frac{d\xi_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dx},$$

$$(4\,c)\qquad \frac{dh\xi_2}{dx} + \frac{dh\eta_2}{dy} = \zeta_2.$$

Quatrième groupe ($n > 2$).

$$(1\,d)\qquad \begin{cases} -g\dfrac{d\zeta_n}{dx} = -2i\Omega\eta_{n-1} + \xi_{n-2}, \\ -g\dfrac{d\zeta_n}{dy} = 2i\Omega\xi_{n-1} + \eta_{n-2}, \end{cases}$$

$$(2\,d)\qquad \int \zeta_n\, d\omega = 0,$$

$$(3\,d)\qquad 2i\Omega\left(\frac{d\xi_n}{dx} + \frac{d\eta_n}{dy}\right) = \frac{d\xi_{n-1}}{dy} - \frac{d\eta_{n-1}}{dx},$$

$$(4\,d)\qquad \frac{dh\xi_n}{dx} + \frac{dh\eta_n}{dy} = \zeta_n.$$

A ces équations il faut adjoindre les suivantes :

Soit $F(h)$ une fonction quelconque de h s'annulant pour $h = 0$, on aura, comme dans le numéro précédent,

$$\int d\omega \left[F'(h)\left(\frac{dh\xi}{dx} + \frac{dh\eta}{dy}\right) + (F - hF')\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)\right] = 0;$$

d'où l'on tire les équations

$$(10a) \qquad \int d\omega \left[2i\Omega\zeta_0 F' + (F - hF')\left(\frac{dX_1}{dy} - \frac{dY_1}{dx}\right)\right] = 0,$$

$$(10b) \qquad \int d\omega \left[2i\Omega\zeta_1 F' + (F - hF')\left(\frac{dX_2}{dy} - \frac{dY_2}{dx} + \frac{d\xi_0}{dy} - \frac{d\eta_0}{dx}\right)\right] = 0,$$

$$(10c) \qquad \int d\omega \left[2i\Omega\zeta_n F' + (F - hF')\left(\frac{d\xi_{n-1}}{dy} - \frac{d\eta_{n-1}}{dx}\right)\right] = 0.$$

L'équation $(10a)$ est une condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions X_1 et Y_1.

Les équations $(10b)$ et $(10c)$ doivent servir à déterminer ξ_0, η_0, ξ_{n-1}, η_{n-1}.

Voici comment se dirigeront les calculs :

Les équations $(1a)$ et $(2a)$ détermineront ζ_0 :

Les équations $(3a)$ et $(4a)$, qui sont compatibles si la condition $(10a)$ est satisfaite, détermineront ξ_0 et η_0 à des termes près

$$-\frac{df_0(h)}{dy} \qquad \text{et} \qquad \frac{df_0(h)}{dx},$$

$f_0(h)$ étant une fonction arbitraire de h.

Les équations $(1b)$ et $(2b)$ détermineront ζ_1 au terme près

$$+\frac{2i\Omega}{g} f_0(h).$$

En même temps $\frac{d\xi_0}{dy} - \frac{d\eta_0}{dx}$ sera déterminé au terme près $-\Delta f_0(h)$: de sorte que l'équation $(10b)$ prendra la forme

$$\int d\omega \left[-\frac{4\Omega^2}{g} F' f_0 + (hF' - F)\Delta f_0 \right] = \text{expression connue.}$$

C'est l'équation (10 *b bis*) du numéro précédent et nous avons vu comment il faut la traiter pour déterminer $f_0(h)$.

La fonction $f_0(h)$ étant ainsi connue, la détermination de ξ_0, η_0, ζ_1 se trouve achevée.

Et ainsi de suite.

Pour pouvoir appliquer les principes du n° **11**, il nous faut voir ce que deviennent nos fonctions H_2, H_1, H_0 au degré d'approximation adopté. On trouve aisément

$$H_2 = \int \frac{h\,d\omega}{2}\,\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dt^2},$$

$$H_1 = \Omega \int h\,d\omega\left(\eta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\eta}{dt}\right),$$

$$H_0 = -\frac{g}{2}\int \zeta^2\,d\omega.$$

Le rapport $\frac{K_4}{K_3}$ prend alors la forme

$$\frac{-\int h\,d\omega(\xi_3^2 + \eta_3^2) + g\int \zeta_4^2\,d\omega}{\int h\,d\omega(\xi_2^2 + \eta_2^2) - g\int \zeta_3^2\,d\omega}.$$

En tenant compte des équations $(1\,d)(n=4)$ et $(4\,d)(n=3)$ cette expression devient

$$(5)\qquad \frac{-\int h\,d\omega(\xi_3^2 + \eta_3^2) + g\int \zeta_4^2\,d\omega}{\int h\,d\omega\left[\left(g\frac{d\zeta_4}{dx} - 2i\Omega\eta_3\right)^2 - \left(g\frac{d\zeta_4}{dy} + 2i\Omega\xi_3\right)^2\right] - g\int d\omega\left(\frac{dh\xi_3}{dx} + \frac{dh\eta_3}{dy}\right)^2},$$

et elle ne contient plus que trois fonctions arbitraires

$$\xi_3,\quad \eta_3,\quad \zeta_4.$$

Ces trois fonctions ne sont pas cependant entièrement arbitraires; car elles sont assujetties à la condition $(2\,d)(n=4)$ et à la condition $(10\,c)(n=4)$.

Ces conditions sont d'ailleurs les seules. Si elles sont remplies, on pourra à l'aide de $(3\,d)$ et $(4\,d)(n=4)$ puis de $(1\,d)$, $(2\,d)(n=5)$ et $(10\,c)(n=5)$, déterminer ξ_4, η_4, ζ_5, et ainsi de suite.

Il reste à voir que ces fonctions ξ_3, η_3, ζ_4 sont compatibles avec les équations ($1\,a, b, c$), ($2\,a, b, c$), ($3\,a, b, c$), ($4\,a, b, c$), ($10\,a, b$), ($1, d, n = 3$ et 4), ($2\,d, n = 3$ et 4), ($3, 4\,d\,n = 3$) ($10, c, n = 3$).

Or cette compatibilité est évidente, ($1\,d, n = 4$) donnera ξ_2 et η_2 et entraînera comme conséquence ($3\,d, n = 3$); ($4\,d, n = 3$) nous donnera ζ_3 et entraînera ($10\,c, n = 3$) et ($2\,d, n = 3$).

Ensuite ($1\,d, n = 3$) donnera ξ_1 et η_1 et entraînera ($3\,c$); ($4\,c$) donnera ζ_2 et entraînera ($10\,c, n = 2$) et ($2\,c$).

On pourra choisir X_2 et Y_2 arbitrairement; ($1\,c$) donnera ξ_0 et η_0 et entraînera ($3\,b$); ($4\,b$) donnera ζ_1 et entraînera ($10\,b$) et ($2\,b$).

Enfin ($1\,b$) donnera X_1 et Y_1 et entraînera ($3\,b$); ($4\,a$) donnera ζ_0 et entraînera ($10\,a$) et ($2\,a$); ($1\,a$) donnera X_0 et Y_0.

Voyons maintenant si nous ne pouvons pas nous affranchir de ces deux conditions ($2\,d, n = 4$), ($10\,c, n = 4$).

Pour cela j'observe d'abord que si j'ajoute à ξ_4 une constante quelconque le dénominateur de (5) ne change pas.

Il en est encore de même si j'ajoute respectivement à ξ_3, η_3, ζ_4 les termes

$$-\frac{d\,f(h)}{dy}, \quad \frac{d\,f(h)}{dx}, \quad +\frac{2i\Omega\,f(h)}{g},$$

$f(h)$ étant une fonction quelconque de h.

On est donc amené à chercher à déterminer cette fonction $f(h)$ de telle façon que le numérateur soit minimum.

Je puis encore énoncer le problème en d'autres termes : quelle est la condition que doivent remplir les fonctions ξ_3, η_3, ζ_4 pour que le numérateur augmente quand on change ξ_3, η_3, ξ_4 en

$$\xi_3 - \frac{d\,f(h)}{dy}, \quad \eta_3 + \frac{d\,f(h)}{dx}, \quad \xi_4 + \frac{2i\Omega}{g} f(h),$$

et cela quelle que soit la fonction arbitraire $f(h)$?

Écrivons donc que la variation de ce numérateur est nulle :

$$(6) \qquad -\int h(\xi_3\,\delta\xi_3 + \eta_3\,\delta\eta_3)\,d\omega + g\int \zeta_4\,\delta\zeta_4\,d\omega = 0.$$

Cette condition doit être remplie quelle que soit $f(h)$ quand on fait

$$\delta\xi_3 = -\frac{d\,f(h)}{dy}, \qquad \delta\eta_3 = \frac{d\,f(h)}{dx}, \qquad \delta\zeta_4 = +\frac{2i\Omega}{g}f,$$

d'où

$$(6\ bis) \qquad \int h\,f'\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega + 2i\Omega\int\zeta_4 f\,d\omega = 0.$$

Posons $f = \mathrm{F}'$, $f' = \mathrm{F}''$; nous pourrons encore supposer que F s'annule pour $h = 0$, et nous aurons

$$\int h\,\mathrm{F}''\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega + 2i\Omega\int\zeta_4\,\mathrm{F}'\,d\omega = 0.$$

Or, $h\mathrm{F}''$ est la dérivée de $h\mathrm{F}' - \mathrm{F}$, et comme $h\mathrm{F}' - \mathrm{F}$ s'annule pour $h = 0$, l'intégration par parties nous donnera

$$\int h\,\mathrm{F}''\left(\xi_3\frac{dh}{dy} - \eta_3\frac{dh}{dx}\right)d\omega = -\int(h\mathrm{F}' - \mathrm{F})\left(\frac{d\xi_3}{dy} + \frac{d\eta_3}{dx}\right)d\omega.$$

On tire de là

$$(6\ ter) \qquad \int\left[(\mathrm{F} - h\mathrm{F}')\left(\frac{d\xi_3}{dy} - \frac{d\eta_3}{dx}\right) + 2i\Omega\zeta_4\mathrm{F}'\right]d\omega = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation ($10c$, $n = 4$).

Si, de même, dans l'équation (6 *bis*) nous faisons

$$f = 1,$$

il vient

$$\int\zeta_4\,d\omega = 0$$

ce qui n'est autre chose que l'équation ($2d$, $n = 4$).

Nous sommes ainsi conduits à l'énoncé suivant :

Considérons le rapport (5) où ξ_3, η_3, ζ_4 sont trois fonctions tout à

fait arbitraires; ou mieux le rapport

$$(5\ bis)\qquad \frac{\displaystyle\int (hu^2 + hv^2 + gw^2)\, d\omega}{\displaystyle\int d\omega \left[h\left(g\frac{dw}{dx} + 2\Omega v\right)^2 + h\left(g\frac{dw}{dy} - 2\Omega u\right)^2 + g\left(\frac{dhu}{dx} + \frac{dhv}{dy}\right)^2 \right]},$$

où j'ai posé

$$\xi_3 = iu, \qquad \eta_3 = iv, \qquad \zeta_3 = w,$$

de telle façon que les trois fonctions arbitraires u, v, w soient réelles.

Posons maintenant

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p - \frac{d f(h)}{dy},$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p + \frac{d f(h)}{dx},$$

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p - \frac{2\Omega f(h)}{g}.$$

Dans ces expressions les α_i sont des coefficients indéterminés, les u_i, les v_i, les w_i des fonctions complètement arbitraires; $f(h)$ une fonction arbitraire de h.

Regardant d'abord les u_i, les v_i, les w_i comme déterminés, nous choisissons les α_i et $f(h)$ de telle façon que le rapport (5 *bis*) soit aussi petit que possible; soit R le minimum ainsi obtenu qui dépendra des u_i, des v_i et des w_i; choisissons les u_i, v_i, w_i de façon que R soit aussi grand que possible; le maximum ainsi obtenu, que j'appellerai le $p+1^{\text{ième}}$ *maximum* sera $\frac{1}{\lambda_p^2}$.

La définition du $p+1^{\text{ième}}$ maximum se trouve ainsi un peu modifiée puisqu'au lieu de $p+1$ coefficients arbitraires, on a p coefficients arbitraires α_i et une fonction arbitraire $f(h)$. Mais cette modification n'a rien d'essentiel.

Ainsi *la détermination des périodes des oscillations propres du vase tournant est ramenée à la recherche des maxima successifs du rapport* (5 *bis*).

De cette détermination dépend, comme je l'ai expliqué à la fin du

numéro précédent, la possibilité d'étendre le domaine de convergence des séries procédant suivant les puissances de λ et d'augmenter la rapidité de leur convergence.

Ainsi l'étude du mouvement des mers, en tenant compte de la rotation du Globe, se trouve rattachée aux principes exposés dans la première Partie de ce Travail, où je négligeais cette rotation.

Dans un cas comme dans l'autre on est amené à envisager les maxima successifs du rapport de deux intégrales.

C'est ce qu'on comprendra mieux d'ailleurs si je montre ce que devient le rapport (5 *bis*) quand on suppose la rotation nulle.

On a alors

$$\Omega = 0, \qquad u = v = 0$$

et le rapport se réduit à

$$\frac{1}{g}\,\frac{\int w^2\,d\omega}{\int h\left[\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right]d\omega},$$

ce qui est précisément le rapport envisagé au n° 6.

Il resterait à tenir compte de la courbure; mais c'est ce qui pourrait se faire d'après les mêmes principes.

Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. Les surfaces hyperelliptiques, pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, et que j'ai, après M. Picard, étudiées dans ce Journal (4e série, t. IX), peuvent être définies d'une manière purement géométrique. Soit, en effet, C une courbe de genre deux; imaginons qu'une surface algébrique S soit liée à C de telle sorte qu'à un couple de points de C corresponde un seul point de S, c'est-à-dire que les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface puissent s'exprimer par les relations

$$X_i = F_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ désignent les coordonnées de deux points quelconques de la courbe C, et les F_i des fonctions rationnelles, qui restent inaltérées quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2; il est clair que S sera une surface hyperelliptique. En effet, représentons par $g_1(\xi)\,d\xi$ et $g_2(\xi)\,d\xi$ deux différentielles abéliennes distinctes de première espèce appartenant à la courbe C; si l'on pose

$$g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du,$$
$$g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv,$$

on sait, par la théorie de l'inversion, que toute fonction rationnelle symétrique en ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 est une fonction abélienne de u, v, à quatre paires de périodes; ce qui démontre la proposition.

Sous ce point de vue, les surfaces hyperelliptiques apparaissent comme un cas particulier de surfaces plus générales, qu'on obtient en remplaçant, dans la définition géométrique ci-dessus, la courbe C, de genre deux, par une courbe de genre quelconque, et dont on peut dire, plus brièvement, qu'*elles représentent les couples de points* d'une courbe quelconque. Le présent Mémoire a pour objet l'étude d'une de ces surfaces, qui correspond à une courbe de genre trois, et qui se trouve liée, d'une manière remarquable, à la surface de Kummer; ses propriétés conduisent aussi à quelques théorèmes simples sur la courbe plane du quatrième ordre.

2. Établissons d'abord une proposition relative au genre de nos surfaces, dans le cas général.

Supposons que la correspondance entre la surface S et la courbe C, de genre p, soit une correspondance *point par couple*, c'est-à-dire qu'à un couple de points de C corresponde un et un seul point de S, ainsi qu'on l'a admis plus haut, et, de plus, qu'à un point de S corresponde *un seul* couple sur C; il est aisé de déterminer le *genre* de la surface.

Ce genre en effet, par définition, est égal au nombre des intégrales doubles abéliennes, linéairement distinctes, de la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

qui restent finies sur toute la surface; or, en vertu des relations (1), une telle intégrale s'écrit

$$\int\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

f étant une fonction rationnelle de $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$,

$$f = \varphi\left[\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1}\right],$$

qui *change de signe* quand on y permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 (1).

Or, pour que la nouvelle intégrale double reste finie, il est nécessaire que l'intégrale simple

$$\int f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)\, d\xi_1,$$

où ξ_2, η_2 sont supposés constants, demeure finie sur la courbe C; ce sera donc une intégrale abélienne de première espèce appartenant à C, c'est-à-dire qu'on aura

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = A_1 g_1(\xi_1) + \ldots + A_p g_p(\xi_1),$$

en désignant par $A_1, \ldots A_p$ des fonctions (rationnelles) de ξ_2, η_2 et par $g_i(\xi, \eta)\, d\xi$, ou plus simplement par $g_i(\xi)\, d\xi$, les p différentielles abéliennes de première espèce qui appartiennent à C. En raisonnant de même sur l'intégrale $\int f\, d\xi_2$, on voit que les A doivent être des combinaisons linéaires et homogènes des $g_i(\xi_2, \eta_2)$, en sorte qu'on a

$$f(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = \sum a_{ik}\, g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2),$$

les a_{ik} désignant des constantes absolues. Pour que f change de signe quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2, il faut et il suffit que $a_{ik} = -a_{ki}$, c'est-à-dire que

$$f = \sum a_{ik} [g_i(\xi_1)\, g_k(\xi_2) - g_k(\xi_1)\, g_i(\xi_2)].$$

En donnant à i et k les valeurs 1, 2, ... p $(i \gtrless k)$, on obtient ainsi $\frac{1}{2}p(p-1)$ fonctions f, linéairement distinctes.

Inversement, f étant une de ces fonctions, il est clair que l'intégrale

$$\int\int f\, d\xi_1\, d\xi_2$$

---

(1) $\dfrac{\partial F}{\partial \xi_1}$ désigne la dérivée de F par rapport à ξ_1, en considérant η_1 comme lié à ξ_1 par l'équation de la courbe C.

pourra se mettre sous la forme

$$\int\int \varphi(X_1, X_2, X_3)\, dX_1\, dX_2,$$

et φ sera une fonction rationnelle, car à un couple de points $\xi_1, \eta_1 ; \xi_2, \eta_2$, ne correspond, par hypothèse, qu'*un seul* point X_1, X_2, X_3 de la surface S; ainsi :

Une surface qui correspond point par couple à une courbe de genre p est de genre $\frac{1}{2}p(p-1)$.

Pour $p = 2$, le genre est 1, résultat connu de la théorie des surfaces hyperelliptiques.

Cas où la courbe est de genre trois.

5. Nous n'aborderons dans ce Mémoire que le cas de $p = 3$, et encore nous bornerons-nous à un exemple particulier; la courbe C est alors, si l'on veut, et sans que la généralité soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre.

On peut, dans ce cas, indiquer une représentation simple des coordonnées des points des surfaces correspondantes, à l'aide des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes. Gardons, en effet, les notations des numéros précédents et posons

$$(2)\quad \begin{cases} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = dw. \end{cases}$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) est une fonction abélienne de u, v, w : il en est de même si l'on suppose que le point ξ_3, η_3 est fixe, mais alors u, v, w sont liés par une relation, qui est, comme on le sait,

$$(3)\quad \Im_0(u-\lambda, v-\mu, w-\nu) = 0,$$

$\mathfrak{S}_0(u, v, w)$ désignant la fonction thêta abélienne d'ordre un, de caractéristique nulle, et λ, μ, ν des constantes.

En d'autre termes, en augmentant u, v, w de constantes convenables, on voit que les surfaces qui correspondent au cas de $p = 3$ peuvent être représentées paramétriquement par les équations

$$(4) \qquad X_i = \varphi_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les φ_i sont des fonctions abéliennes, à six systèmes de périodes, des trois paramètres u, v, w, liés eux-mêmes par la relation

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$

où $\mathfrak{S}(u, v, w)$ est une des 64 fonctions thêta normales du premier ordre, qu'on peut choisir d'ailleurs à volonté.

4. Avant de définir par cette voie la surface particulière qui est l'objet de ce travail, rappelons ou indiquons quelques propriétés des fonctions thêta de genre trois.

Supposons d'abord que les six systèmes de périodes aient été ramenés à être

$$\begin{array}{cccccc} 2\pi i, & 0, & 0, & a, & b, & c; \\ 0, & 2\pi i, & 0, & b, & d, & e; \\ 0, & 0, & 2\pi i, & c, & e, & h; \end{array}$$

on appelle *fonction thêta normale*, d'ordre m, une fonction uniforme, entière, de u, v, w, vérifiant les relations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(u + 2\pi i, v, w) &= e^{\varepsilon_1 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u, v + 2\pi i, w) &= e^{\varepsilon_2 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u, v, w + 2\pi i) &= e^{\varepsilon_3 \pi i}\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u + a, v + b, w + c) &= e^{\eta_1 \pi i} e^{-mu - m\frac{a}{2}}\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u + b, v + d, w + e) &= e^{\eta_2 \pi i} e^{-mv - m\frac{d}{2}}\Theta(u, v, w), \\ \Theta(u + c, v + e, w + h) &= e^{\eta_3 \pi i} e^{-mw - m\frac{h}{2}}\Theta(u, v, w), \end{aligned} \right.$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ désignant o ou 1. L'ensemble des six nombres

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{matrix}$$

est dit la *caractéristique* de la fonction thêta; la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls.

D'après cela, pour tout ordre m, il y a 64 caractéristiques différentes, c'est-à-dire 64 systèmes de fonctions thêta normales; en particulier, il y a 64 fonctions thêta normales d'ordre *un*. Parmi ces fonctions 36 sont paires et 28 sont impaires; chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\left.\begin{aligned} u &= l\pi i + p\frac{a}{2} + q\frac{b}{2} + r\frac{c}{2} \\ v &= m\pi i + p\frac{b}{2} + q\frac{d}{2} + r\frac{e}{2} \\ w &= n\pi i + p\frac{c}{2} + q\frac{e}{2} + r\frac{h}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (l, m, n, p, q, r = 0 \text{ ou } 1).$$

3. L'algorithme suivant, que j'ai déjà fait connaître dans ce Journal (4e série, t. X, p. 473), établit un lien entre les 64 fonctions thêta et les demi-périodes annulant chacune d'elles.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ trois séries de quatre caractères; les 64 symboles $\alpha\alpha'\alpha''$ représenteront les 64 fonctions thêta normales d'ordre un et les 64 symboles $(\alpha\alpha'\alpha'')$ représenteront les 64 demi-périodes, de telle sorte :

1° *Que les 28 demi-périodes annulant la fonction $\alpha\alpha'\alpha''$ soient représentées par les symboles $(pp'p'')$, où les caractères $\alpha, \alpha', \alpha''$ figurent, au total, un nombre impair de fois;*

2° *Que les 28 fonctions qui s'annulent pour la demi-période $(\alpha\alpha'\alpha'')$ soient également représentées par les symboles $pp'p''$, où les caractères $\alpha, \alpha', \alpha''$ figurent, au total, un nombre impair de fois.*

L'algorithme jouit de plus des propriétés suivantes :

I. Il peut être appliqué de telle sorte que deux fonctions thêta choisies à volonté aient deux symboles choisis à volonté.

II. Considérons le produit de fonctions thêta normales, d'ordre un, en nombre pair, telles que $\alpha\alpha'\alpha''$; $\beta\beta'\beta''$; ...; écrivons à la suite les uns des autres les caractères qui entrent dans les symboles de ces fonctions, et traitons cette expression comme un produit algébrique; elle sera de la forme

$$\alpha^h \beta^k \gamma^l \delta^m \alpha'^{h'} \beta'^{k'} \ldots \alpha''^{h''} \beta''^{k''} \ldots$$

Si les exposants h, k, l, m sont entre eux de même parité, ainsi que les exposants h', k', l', m' et les exposants h'', k'', l'', m'', le produit des fonctions thêta considérées (produit qui est évidemment une fonction thêta normale) aura sa caractéristique nulle.

De plus, si la somme $h + h' + h''$ est paire, ce produit sera une fonction paire de u, v, w, c'est-à-dire ne changera pas quand on changera simultanément les signes des trois variables.

Ces propriétés s'établissent par les raisonnements que nous avons employés dans le cas des fonctions thêta de deux variables (4ᵉ série de ce Journal, t. IX, p. 56-60).

Définition analytique d'une surface d'ordre six.

6. Soient $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux quelconques des 64 fonctions normales du premier ordre; nous pouvons les supposer représentées par les symboles

$$\alpha\alpha'\alpha'' \quad \text{pour} \quad \mathfrak{S}_1, \qquad \text{et} \qquad \alpha\alpha'\beta'' \quad \text{pour} \quad \mathfrak{S}_2.$$

Le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ est une fonction normale d'ordre deux, paire ou impaire, de caractéristique non nulle. Il est clair que les 62 autres fonctions normales d'ordre un se groupent deux à deux de manière que le produit $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$ des deux fonctions d'un groupe ait même caractéristique que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$; on forme ainsi, au total, 32 produits $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$, parmi lesquels 16 sont des fonctions paires et 16 des fonctions impaires. Dans notre notation symbolique, le produit des deux fonctions

$$pp'\alpha'' \quad \text{et} \quad pp'\beta''$$

a même caractéristique que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ et même parité, c'est-à-dire est pair ou impair selon que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ est pair ou impair; le produit des fonctions

$$pp'\gamma'' \quad \text{et} \quad pp'\delta''$$

a même caractéristique que $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, mais a la parité contraire.

Or les fonctions thêta normales, d'ordre m, de caractéristique donnée, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^3 d'entre elles, linéairement distinctes; si la caractéristique donnée n'est pas nulle, et si m est pair, on peut prendre, pour ces m^3 fonctions, $\frac{m^3}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^3}{2}$ fonctions impaires. Il en résulte, en supposant $m=2$, que les fonctions normales, d'ordre deux, de caractéristique non nulle et *paires* sont fonctions linéaires et homogènes de 4 d'entre elles; de même pour les fonctions analogues *impaires*.

Ajoutons enfin que les fonctions normales, d'ordre pair, de caractéristique non nulle, et *paires,* s'annulent toutes pour 32 demi-périodes; les fonctions analogues, *impaires,* s'annulent pour les 32 autres demi-périodes (*voir* ce Journal, 4[e] série, t. IX, p. 39-40).

7. Cela posé, désignons par $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ quatre fonctions normales d'ordre deux, linéairement distinctes, ayant la caractéristique du produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$, et la parité contraire; considérons la surface $\mathfrak{S}$ définie paramétriquement par les relations

$$x_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

les arguments u, v, w étant liés par la relation

$$\mathfrak{S}_1(u, v, w) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois; cherchons son ordre.

Observons à cet effet qu'à un point de $\mathfrak{S}$ correspondent (abstraction faite de périodes) les deux systèmes d'arguments u, v, w et $-u, -v, -w$; car $\mathfrak{S}_1$ est une fonction paire ou impaire, et les quatre Θ_i sont

simultanément paires ou impaires. De plus, les Θ_i s'annulent pour 32 demi-périodes (représentées par les symboles qui contiennent un des caractères γ'' ou δ'') et $\mathfrak{S}_1$ pour 28; et l'on reconnaît aisément que 12 demi-périodes annulent à la fois $\mathfrak{S}_1$ et les Θ_i; ce sont les 12 demi-périodes qui annulent simultanément $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. De là résulte la détermination de l'ordre de $\mathfrak{S}$.

Cet ordre est le nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4 = 0; \qquad b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4 = 0; \qquad \mathfrak{S}_1 = 0,$$

$a_1, \ldots, b_4$ étant des constantes; or, d'après M. Poincaré, trois fonctions thêta, de genre trois, d'ordres m, n, p, ont $6\,mnp$ solutions communes: nos trois équations en auront donc $6 \times 2 \times 2 = 24$, parmi lesquelles figurent 12 demi-périodes. Les autres solutions, au nombre de $24 - 12 = 12$, sont deux à deux égales et de signes contraires, de sorte qu'il ne leur correspond que $\frac{1}{2}\,12 = 6$ points de $\mathfrak{S}$. *La surface $\mathfrak{S}$ est donc du sixième ordre.*

Étude de la surface du sixième ordre $\mathfrak{S}$.

8. Quel est le genre de $\mathfrak{S}$? Cette surface ne correspond pas *point par couple* à une courbe C de genre trois, car à un point de $\mathfrak{S}$ répondent deux systèmes de valeurs de u, v, w, c'est-à-dire *deux* couples de points de C; le théorème du n° **2** n'est donc pas immédiatement applicable. Néanmoins le genre est 3, comme dans le cas général $\left[\frac{1}{2}p(p-1)\right]$, car les trois intégrales doubles

$$\int\!\!\int du\,dv, \quad \int\!\!\int du\,dw, \quad \int\!\!\int dv\,dw$$

restent finies à l'intérieur d'un parallélépipède des périodes; et, comme elles ne changent pas quand on change u, v, w en $-u, -v, -w$, ce sont des intégrales de première espèce sur la surface $\mathfrak{S}$. Celle-ci est dès lors de genre 3, car la première partie de la démonstration du n° **2** établit que le genre ne peut dépasser $\frac{1}{2}p(p-1)$, ici trois.

9. Avant d'aller plus loin, il est utile de préciser la forme des fonctions Θ_i, qui définissent la surface $\mathfrak{S}$.

Observons que la fonction $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}$ se reproduisant, au signe près, quand on augmente u, v, w d'une période, les trois dérivées partielles logarithmiques

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}, \quad \frac{1}{\mathfrak{S}_2}\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w} - \frac{1}{\mathfrak{S}_1}\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w}$$

ne changent pas dans cette substitution; donc les fonctions

$$\mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial u}, \quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial v}, \quad \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w} - \mathfrak{S}_1\frac{\partial \mathfrak{S}_2}{\partial w}$$

sont des fonctions normales, d'ordre deux, de même caractéristique que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$; de plus, elles sont évidemment la parité contraire de celle de ce produit. Dès lors, ces trois fonctions peuvent être prises pour les fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

Or puisque, sur la surface $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$ est nul, on pourra représenter paramétriquement $\mathfrak{S}$ par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} \\ x_2 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} \\ x_3 &= \mathfrak{S}_2\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial w} \\ x_4 &= \Theta_4(u, v, w) \end{aligned}\right\}, \quad \text{avec la relation :} \quad \mathfrak{S}_1(u, v, w) = 0.$$

Il résulte de là que les points de $\mathfrak{S}$ donnés par l'équation $\mathfrak{S}_2(u, v, w) = 0$ se réduisent au point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, que nous désignerons par O. Ce point est un point triple de la surface, car la droite $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe $\mathfrak{S}$, en dehors de O, aux points dont les arguments vérifient les équations

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u} = 0; \qquad \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v} = 0; \qquad \mathfrak{S}_1 = 0;$$

or les fonctions $\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial v}$, si l'on suppose u, v, w liés par la relation $\mathfrak{S}_1 = 0$, satisfont évidemment, quand on augmente u, v, w de périodes, aux mêmes relations (5) que la fonction $\mathfrak{S}_1$ elle-même, c'est-à-dire qu'elles peuvent être considérées comme des fonctions thêta normales du premier ordre. Le théorème de M. Poincaré sur le nombre des solutions communes à trois fonctions thêta est dès lors applicable, de sorte que les équations (6) ont 6 solutions communes, auxquelles correspondent trois points distincts de $\mathfrak{H}$. Le point $\mathfrak{S}_2 = 0$ est donc bien un point triple.

10. Aux 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_1$ correspondent, sur $\mathfrak{H}$, des lignes et des points remarquables.

D'abord, aux 12 demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{S}_1$ et les quatre Θ_i [et dont les symboles sont $(\alpha\beta'\gamma'')$, $(\alpha\beta'\delta'')$; $(\alpha\gamma'\gamma'')$, $(\alpha\gamma'\delta'')$; $(\alpha\delta'\gamma'')$, $(\alpha\delta'\delta'')$; $(\beta\alpha'\gamma'')$, $(\beta\alpha'\delta'')$; $(\gamma\alpha'\gamma'')$, $(\gamma\alpha'\delta'')$; $(\delta\alpha'\gamma'')$, $(\delta\alpha'\delta'')$]; correspondent évidemment 12 *droites;* ces droites passent par le point triple O, car les 12 demi-périodes considérées annulent $\mathfrak{S}_2$.

Aux 16 autres demi-périodes annulant $\mathfrak{S}_1$ et non les Θ_i répondent, sur la surface $\mathfrak{H}$, seize points *doubles;* supposons en effet que l'une des demi-périodes soit $u = v = w = 0$; les fonctions Θ_i, ne s'annulant pas pour $u = v = w = 0$, et étant paires ou impaires, seront toutes paires, de sorte que, aux environs de $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, on aura

$$\Theta_i = a_i + (A_i u^2 + B_i v^2 + C_i w^2 + D_i uv + E_i uw + F_i vw) + \ldots,$$

d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ de la surface $\mathfrak{H}$, a avec celle-ci deux intersections confondues au point considéré.

11. Étudions maintenant les courbes qu'on définit, sur $\mathfrak{H}$, en annulant les 62 fonctions thêta normales du premier ordre, autres que $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

Parmi ces fonctions, il en est, comme on l'a dit, 32 qui, associées deux à deux, donnent des produits $\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_j$ ayant la caractéristique, mais non la parité, de $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$); chacun de ces produits est fonction linéaire et homogène des quatre Θ_i,

de sorte que les deux courbes qui ont pour équations, sur la surface $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Z}_i = 0$ et $\mathfrak{Z}_j = 0$ sont planes et situées dans un même plan. Leur ordre se détermine aisément; $\mathfrak{Z}_i$ s'annule en effet pour 6 des demi-périodes annulant $\mathfrak{Z}_1$ et les quatre Θ_i; $\mathfrak{Z}_j$ s'annule pour les 6 autres; l'ordre cherché de la courbe $\mathfrak{Z}_i = 0$ est donc égal à $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 6] = 3$. Observons de plus que $\mathfrak{Z}_i$ et $\mathfrak{Z}_j$ s'annulent simultanément pour 6 des 16 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{Z}_1$ et non les quatre Θ_i (toutes ces propositions se vérifient par l'usage de l'algorithme).

On voit par là qu'il existe, sur la surface $\mathfrak{S}$, 32 *cubiques planes, situées par couples dans* 16 *plans;* des deux cubiques d'un même plan, la première rencontre 6 des 12 droites de la surface issues du point triple O, la deuxième rencontre les 6 autres; enfin elles passent toutes deux par 6 des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$.

De là se déduit une conséquence importante : les 16 points doubles de $\mathfrak{S}$ forment une configuration de Kummer, c'est-à-dire sont situés 6 par 6 dans 16 plans, et de telle sorte qu'il passe 6 plans par chaque point. Cette dernière partie de la proposition s'établit en observant qu'une des 16 demi-périodes répondant aux points doubles annule douze fonctions $\mathfrak{Z}_i$, qui, égalées à zéro, donnent 12 cubiques planes, situées par couples dans six plans. Donc :

Les 16 *points doubles de la surface* $\mathfrak{S}$ *sont les points doubles d'une surface de Kummer*, K.

Il reste à étudier les 30 courbes qu'on obtient en annulant les 30 fonctions $\mathfrak{Z}_h$ et $\mathfrak{Z}_k$, telles que le produit $\mathfrak{Z}_h\,\mathfrak{Z}_k$ ait la caractéristique et la parité du produit $\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{Z}_2$ (ce sont les couples de fonctions $pp\,\alpha''$ et $pp'\beta''$).

On voit immédiatement, en se servant de l'algorithme :

1° Que la fonction $\mathfrak{Z}_h$ s'annule pour 4 des 12 demi-périodes qui annulent à la fois $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ et les quatre Θ_i; 2° qu'elle s'annule pour 8 des 16 demi-périodes annulant $\mathfrak{Z}_1$ et non les Θ_i; 3° par suite, les équations $\mathfrak{Z}_1 = 0$, $\mathfrak{Z}_2 = 0$, $\mathfrak{Z}_h = 0$ ont, en dehors des 4 demi-périodes ci-dessus (1°), deux solutions communes, égales et de signes contraires.

Il en résulte :

1° Que la courbe $\mathfrak{Z}_h = 0$ est d'ordre $\frac{1}{2}[6 \times 2 - 4] = 4$, et rencontre

quatre des douze droites de $\mathfrak{S}$; 2° qu'elle passe par huit des 16 points doubles de $\mathfrak{S}$; 3° qu'elle passe par le point triple, O, et y a un point simple.

D'après cela, la courbe $\mathfrak{S}_h = 0$, qui n'est évidemment pas plane, ne peut être qu'une biquadratique ou une unicursale gauche d'ordre quatre; nous verrons plus bas qu'elle est de genre un, ce qui écarte la seconde hypothèse. Il y a donc, sur $\mathfrak{S}$, *trente biquadratiques* passant par le point triple et, respectivement, par 8 des 16 points doubles : on reconnaît, par l'étude des demi-périodes correspondantes, que ces 8 points doubles forment, sur la surface de Kummer K, un des 30 octaèdres de Göpel, c'est-à-dire, en particulier, qu'ils sont la base d'un réseau (système linéaire doublement infini) de quadriques. Par les 8 points de chaque octaèdre et par le point triple O passe donc une biquadratique, qui coïncide nécessairement (comme la coupant en 9 points) avec une des trente biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$.

12. De là résulte une détermination géométrique de la surface $\mathfrak{S}$. Soient K une surface de Kummer, O le point triple de $\mathfrak{S}$; par chaque système de huit points doubles de K, formant un octaèdre de Göpel, et par le point O, passe une biquadratique; les 30 biquadratiques ainsi définies sont sur la surface d'ordre six, $\mathfrak{S}$, qu'elles déterminent évidemment d'une manière complète.

La surface de Kummer K et le point O peuvent-ils être choisis arbitrairement? La surface K dépend (à une transformation homographique près) de trois invariants; quand elle est donnée, la position du point O comporte trois arbitraires, ce qui donne en tout 6 paramètres : or, la surface $\mathfrak{S}$ dépend de 6 paramètres, à savoir les 6 modules de la courbe de genre trois à laquelle elle correspond; il n'y a donc aucune liaison entre les trois invariants de la surface de Kummer et les coordonnées du point O par rapport à cette surface, c'est-à-dire que K et O sont complètement arbitraires.

13. Présentons une dernière remarque sur les 12 droites et les 30 biquadratiques de $\mathfrak{S}$; soient, comme plus haut, $\mathfrak{S}_h$ et $\mathfrak{S}_k$ deux fonctions thêta dont le produit a la caractéristique et la parité de $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$;

on vérifie, à l'aide de l'algorithme, qu'elles s'annulent *simultanément* pour quatre des 12 demi-périodes qui correspondent aux 12 droites de $\mathfrak{H}$; de plus, ces demi-périodes sont associées deux à deux de telle sorte que toute fonction $\mathfrak{Z}_h$, s'annulant pour l'une d'elles, s'annule aussi pour l'autre. Géométriquement, on peut donc dire que les 30 biquadratiques sont *associées* deux à deux, les biquadratiques d'un couple rencontrant quatre mêmes droites de $\mathfrak{H}$; les 12 droites de $\mathfrak{H}$ sont également *associées* deux à deux, de telle sorte que toute biquadratique rencontrant une droite d'un couple rencontre également l'autre. Dans notre notation symbolique, les biquadratiques $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ sont associées; de même les droites $(\alpha\beta'\gamma'')$ et $(\alpha\beta'\delta'')$ dont les symboles ont les deux premiers caractères communs.

Correspondance entre $\mathfrak{H}$ et la courbe plane d'ordre quatre.

14. Nous savons qu'à un couple de points de la courbe plane d'ordre quatre, C, correspond un et un seul point de $\mathfrak{H}$, mais qu'à un point de $\mathfrak{H}$ correspondent deux couples sur C; étudions de plus près cette relation.

Soient ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 deux points arbitraires de C; on a vu (n° **5**) qu'en posant

$$(7)\qquad \begin{cases} g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 = du, \\ g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + g_2(\xi_2)\,d\xi_2 = dv, \\ g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + g_3(\xi_2)\,d\xi_2 = dw, \end{cases}$$

et en déterminant convenablement les constantes d'intégration, u, v et w sont liés par la relation $\mathfrak{Z}_1(u, v, w) = 0$; au couple (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) sur C correspond le point u, v, w sur $\mathfrak{H}$. Au même point de $\mathfrak{H}$ correspondent les arguments $-u, -v, -w$, c'est-à-dire, sur C, le couple (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4), tel que

$$g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = -du,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$g_1(\xi_1)\,d\xi_1 + g_1(\xi_2)\,d\xi_2 + g_1(\xi_3)\,d\xi_3 + g_1(\xi_4)\,d\xi_4 = 0,$$
$$g_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$g_3(\xi_1)\,d\xi_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0;$$

équations qui établissent, comme il est bien connu, que les points ξ_3, η_3 et ξ_4, η_4 sont les deux points où la droite joignant (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) coupe de nouveau C. Donc :

A deux couples de points situés en ligne droite sur la courbe C *correspond un seul et même point de la surface* $\mathfrak{S}$, *et réciproquement.*

Désignons maintenant par $G_i(\xi)$ l'intégrale $\int g_i(\xi)\,d\xi$; les relations (7) donnent, si l'on choisit convenablement les limites inférieures des intégrales,

$$(8)\qquad \begin{cases} G_1(\xi_1) + G_1(\xi_2) = u, \\ G_2(\xi_1) + G_2(\xi_2) = v, \\ G_3(\xi_1) + G_3(\xi_2) = w, \end{cases}$$

la relation $\mathfrak{S}_1(u, v, w) = 0$ étant toujours satisfaite. Cela posé, observons qu'une quelconque des fonctions thêta normales du premier ordre se déduit de $\mathfrak{S}_1$ (à un facteur exponentiel près) en augmentant u, v, w d'une demi-période; en d'autres termes, aux points de la courbe $\mathfrak{S}_i(u, v, w) = 0$, sur $\mathfrak{S}$, correspondent, sur C, les couples de points ξ_1, ξ_2 et ξ'_1, ξ'_2, vérifiant les relations

$$G_1(\xi_1) + G_1(\xi_2) = G_1(\xi'_1) + G_1(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$
$$G_2(\xi_1) + G_2(\xi_2) = G_2(\xi'_1) + G_2(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{P}_2}{2},$$
$$G_3(\xi_1) + G_3(\xi_2) = G_3(\xi'_1) + G_3(\xi'_2) + \frac{\mathfrak{P}_3}{2}.$$

Désignons par ξ_3, ξ_4 les deux points de C en ligne droite avec ξ'_1 et ξ'_2;

les équations précédentes s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}\sum_j G_1(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\ \sum_j G_2(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_2}{2},\\ \sum_j G_3(\xi_j) &= \frac{\mathfrak{P}_3}{2};\end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ étant une période. Ces relations montrent que les quatre points ξ_j sont les points de contact de la courbe C avec une conique quadritangente: en d'autres termes, aux couples que forment les quatre points où C est touchée par une conique quadritangente variable, appartenant à un des 63 systèmes de coniques inscrites, correspond, sur la surface $\mathfrak{S}$, une des 63 courbes $\mathfrak{S}_h = 0$ ($h > 1$). Ces 63 courbes sont, comme on l'a vu, les 32 cubiques planes, les 30 biquadratiques et le point triple, ou plutôt le cône des tangentes au point triple; d'après ce qui précède, chacune d'elles correspond, point par tangente, à l'enveloppe des droites joignant deux à deux, sur C, les quatre points de contact des coniques inscrites d'un même système. Or, ces droites enveloppent, comme on sait, une courbe générale de troisième classe (de genre un), la *Cayleyenne* du système; les courbes $\mathfrak{S}_h = 0$ de la surface $\mathfrak{S}$ sont donc *de genre un*, ce qui montre que les 32 cubiques planes n'ont pas de point double, et que les 30 courbes gauches d'ordre quatre sont bien des biquadratiques.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces correspondances, dont une image géométrique plus nette sera indiquée dans la suite.

Génération géométrique de la surface $\mathfrak{S}$.

15. Soient $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface quelconque d'ordre quatre; α_1, α_2, α_3, α_4 les coordonnées d'un point extérieur, O. Une sécante quelconque issue de O coupe K en quatre points, a_1, a_2, a_3, a_4, qui se répartissent, de trois manières, en deux couples.

Soit a_1, a_2 et a_3, a_4 un de ces groupements; les couples a_1, a_2

et a_3, a_4 déterminent sur la sécante une involution du second ordre, dans laquelle le point O a un conjugué, m. Cette construction donne trois points m sur toute sécante menée par O; le lieu des points m, quand la sécante tourne autour de O, est une surface du sixième ordre, dont la Géométrie analytique donne aisément l'équation. Cette équation est

$$(9) \quad K(x_1, \ldots, x_4)\, H^2(x_1, \ldots, x_4) - K(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)\, P^2(x_1, \ldots, x_4) = 0,$$

où P et H désignent respectivement les premiers membres des équations de la première et de la troisième polaire du point O par rapport à la surface $K = 0$, c'est-à-dire

$$P = \alpha_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots + \alpha_4 \frac{\partial K}{\partial x_4},$$

$$6H = \alpha_1^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^3} + 3\alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\partial^3 K}{\partial x_1^2\, \partial x_2} + \ldots + \alpha_4^3 \frac{\partial^3 K}{\partial x_4^3}.$$

Si K est une surface de Kummer, je dis que la surface du sixième ordre (9) ainsi définie coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ dont les seize points doubles seraient ceux de K, et dont le point triple serait O; il suffit, pour cela, d'établir (n° **12**) que la surface (9) contient les 30 biquadratiques menées par O et par les sommets de chacun des octaèdres de Göpel que forment les 16 points doubles de K.

Considérons un de ces groupes de 8 points : ils sont, comme on sait, la base d'un réseau ponctuel de quadriques, dont les génératrices rectilignes forment un complexe du troisième ordre; sur chaque génératrice, les quadriques du réseau déterminent une involution. Cela posé, soit m un point quelconque de la biquadratique menée par O et par les points de base du réseau; la droite Om appartient au complexe, et les points O et m sont conjugués dans l'involution déterminée sur cette droite par les quadriques du réseau. D'un autre côté, désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 les points où la droite Om coupe la surface de Kummer, K : sur cette surface, on sait qu'il existe une infinité simple de biquadratiques passant par les 8 points du groupe considéré; une de ces biquadratiques passe donc par a_1, je dis qu'elle passe aussi par un des points a_2, a_3, a_4. En effet, toute biquadratique passant par les 8 points

de base et coupant en un point une droite du complexe, la coupe en un second point; donc, puisque Om est une droite du complexe, la biquadratique qui passe par a_1 passe par a_2; de même, celle qui passe par a_3 passe aussi par a_4. Il en résulte que les couples a_1 et a_2, a_3 et a_4, O et m sont trois couples d'une même involution sur la sécante Om, c'est-à-dire que m est sur la surface (9). Cette surface contient donc les 30 biquadratiques considérées, c'est-à-dire coïncide avec la surface $\mathfrak{S}$ qui a pour points doubles les 16 points doubles de K, et pour triple O. C. Q. F. D.

16. L'équation (9) et le mode de génération correspondant mettent en évidence plusieurs propriétés de la surface $\mathfrak{S}$. D'abord cette surface admet pour ligne double une cubique plane, intersection de la première polaire ($P = 0$) et du plan polaire ($\Pi = 0$) du point O par rapport à la surface de Kummer K; de plus, les deux surfaces $\mathfrak{S}$ et K se touchent le long de la courbe de contact de la surface K avec le cône qui lui est circonscrit à partir de O : cela résulte immédiatement de l'équation (9), qui montre aussi que les 16 points doubles de K sont des points doubles de $\mathfrak{S}$.

La génération géométrique fait voir ensuite que $\mathfrak{S}$ contient les douze tangentes doubles menées de O à la surface de Kummer; ces droites rencontrant nécessairement la cubique double, le cône des tangentes de $\mathfrak{S}$ au point triple O coïncide avec le cône de sommet O qui a la cubique double pour directrice.

17. On peut aussi, en partant de la génération géométrique, retrouver le lien qui rattache la surface $\mathfrak{S}$ à la courbe d'ordre quatre ou aux fonctions abéliennes de genre trois.

On sait, en effet, d'après un beau théorème de M. Klein, qu'à toute répartition en deux couples des quatre points où une droite Δ coupe la surface de Kummer K, correspond une répartition en deux couples des quatre plans tangents menés à K par Δ, et réciproquement. Supposons que la droite Δ passe par O; les plans tangents menés à K par Δ toucheront le cône de quatrième classe $\mathfrak{C}$ circonscrit à K à partir du point O. Soient maintenant Π_1 et Π_2 deux plans tangents arbitraires du cône $\mathfrak{C}$; Δ leur droite d'intersection; Π_3 et Π_4 les deux autres plans

tangents menés au cône $\mathfrak{C}$ par Δ : les quatre points où Δ coupe la surface de Kummer se répartissent en deux couples, correspondant aux couples de plans tangents Π_1, Π_2 et Π_3, Π_4; à cette répartition correspond un et un seul point m, de la surface $\mathfrak{S}$, point situé sur Δ. En d'autres termes, à deux plans tangents du cône $\mathfrak{C}$ correspond un point m, de $\mathfrak{S}$; à un point m de $\mathfrak{S}$ correspondent deux couples de plans tangents de $\mathfrak{C}$, ces quatre plans ayant une droite commune. C'est là précisément, sous forme *corrélative*, la relation signalée au n° **14** entre la surface $\mathfrak{S}$ et la courbe plane du quatrième ordre.

Ce mode de correspondance conduit à une conséquence simple : laissons fixe le plan Π_1; quand Π_2 variera, le point correspondant m de la surface $\mathfrak{S}$ reste dans le plan Π_1, où il décrit évidemment une courbe qui répond au cône $\mathfrak{C}$ point par génératrice. Cette courbe est donc de genre trois et a les mêmes modules que le cône; en d'autres termes :

Les sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les plans menés du point triple, tangentiellement à la surface de Kummer, sont des courbes du sixième ordre, de genre trois, et de mêmes modules. Leurs modules sont ceux du cône de quatrième classe enveloppé par les plans considérés.

Sections de la surface $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes.

18. L'emploi des fonctions abéliennes permet d'étudier assez simplement les courbes tracées sur la surface $\mathfrak{S}$, et, en particulier, les sections par les surfaces adjointes. La surface ayant une cubique plane double et un point triple, ses adjointes passeront simplement par la cubique et par le point; en particulier, les adjointes d'ordre deux se décomposeront en deux plans, dont l'un est celui de la courbe double et l'autre un plan quelconque mené par le point triple : elles sont donc en nombre doublement infini, comme on le savait *a priori*, puisque $\mathfrak{S}$ est de genre trois.

Proposons-nous d'abord de trouver l'équation des courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les adjointes du troisième ordre : sans indiquer ici la méthode

générale applicable à toutes les surfaces de même nature que $\mathfrak{S}$, nous profiterons de propriétés géométriques de cette surface pour parvenir directement au résultat.

19. Nous nous appuierons pour cela sur la propriété suivante. Sur une surface algébrique $S(X, Y, Z) = 0$ d'ordre n, les intégrales doubles abéliennes qui ne deviennent infinies que le long de la section plane (choisie au hasard), $Q(X, Y, Z) = 0$, sont comprises dans la formule

$$\int\int \frac{dX\,dY}{S'_Z} \frac{F(X, Y, Z)}{Q^q},$$

q étant un entier et $F(X, Y, Z)$ le premier membre de l'équation d'une surface d'ordre $n+q-4$, *adjointe à* $S = 0$. En particulier, si l'élément de l'intégrale est infini du premier ordre le long de la section, $q = 1$.

Cela posé, observons que, d'après le n° **9**, la surface $\mathfrak{S}$ est représentée paramétriquement par les équations

$$X = \frac{\partial \Xi_1}{\partial u} \frac{\Xi_2}{\Theta_4}, \qquad \ldots, \qquad Z = \frac{\partial \Xi_1}{\partial v} \frac{\Xi_2}{\Theta_4};$$

d'ailleurs $\int\int du\,dv$ est une intégrale de première espèce; elle s'écrit

$$\int\int \frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial \Xi_1}{\partial v}\right)} \frac{\Theta_4}{\Xi_2} Z,$$

et l'on a, d'après la forme générale des intégrales de première espèce sur la surface $S = 0$ (ici $\mathfrak{S}$),

$$\int\int \frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial \Xi_1}{\partial v}\right)} \frac{\Theta_4}{\Xi_2} Z = \int\int \frac{dX\,dY}{S'_Z} R(X, Y, Z),$$

$R = 0$ étant une surface adjointe d'ordre $n - 4 = 2$, qui se décompose (n° **18**) en deux plans, dont l'un est celui $H(X, Y, Z) = 0$, de la courbe double, et l'autre un plan mené par O, lequel est évidemment le plan $Z = 0$. On a donc

$$(10) \qquad \frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial \Xi_1}{\partial v}\right)} = \frac{dX\,dY}{S'_Z} H \frac{\Xi_2}{\Theta_4}.$$

Admettons maintenant, pour abréger le langage, que la fonction désignée jusqu'ici par $\mathfrak{I}_2(u, v, w)$ soit la fonction thêta normale, d'ordre un, *de caractéristique nulle* (cette fonction est paire); et désignons par $\theta(u, v, w)$ une fonction thêta normale, d'ordre trois, de caractéristique nulle et paire [il y a 14 de ces fonctions linéairement distinctes ([1])]. Considérons l'intégrale double

$$\mathrm{J} = \int\int \frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} \frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial \mathfrak{I}_1}{\partial w}\right)}, \tag{11}$$

où $\Theta(u, v, w)$ est une combinaison linéaire et homogène quelconque des quatre fonctions Θ_i; on peut l'écrire, d'après (10),

$$\mathrm{J} = \int\int \frac{dX\,dY}{S'_Z} \mathrm{H} \frac{\mathfrak{I}_2\,\theta}{\Theta_4\,\Theta}.$$

Or, la fonction $\frac{\mathfrak{I}_2\,\theta}{\Theta_4\,\Theta}$ est une fonction abélienne *paire :* elle peut donc, lorsque u, v, w sont liés par la relation $\mathfrak{I}_1 = 0$, s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées X, Y, Z, d'un point de la surface $\mathfrak{S}$; c'est-à-dire que

$$\mathrm{J} = \int\int \frac{dX\,dY}{S'_Z} \frac{\mathrm{M}(X, Y, Z)}{\mathrm{N}(X, Y, Z)}$$

M et N étant des polynomes. Or l'intégrale J, d'après la forme (11), ne devient infinie que pour les valeurs de u, v, w annulant simultanément $\mathfrak{I}_1$ et Θ, c'est-à-dire pour les points de $\mathfrak{S}$ situés dans le plan de la section plane $\Theta = 0$. Si donc $Q(X, Y, Z)$ est l'équation de ce plan, on aura $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{Q}}$, F étant le premier membre de l'équation d'une surface *adjointe* d'ordre trois. Finalement on a

$$\frac{du\,dv}{\left(\frac{\partial \mathfrak{I}_1}{\partial w}\right)} \frac{\theta(u, v, w)}{\Theta(u, v, w)} = \frac{dX\,dY}{S'_Z} \frac{\mathrm{F}(X, Y, Z)}{\mathrm{Q}(X, Y, Z)},$$

([1]) Car, en général, il y a $\frac{1}{2}[n^3 + 1]$ fonctions thêta d'ordre impair, n, de caractéristique nulle et *paires*.

ce qui montre que la courbe $\theta(u, v, w) = 0$, sur $\mathfrak{S}$, est située sur la surface cubique adjointe $F = 0$.

Ainsi, $\theta(u, v, w)$ étant une fonction thêta quelconque, d'ordre trois, de caractéristique nulle, et paire, la courbe $\theta(u, v, w) = 0$ est l'intersection de la surface $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe du troisième ordre. Or il y a 14 fonctions $\theta(u, v, w)$ linéairement distinctes, parmi lesquelles *quatre* contiennent $\mathfrak{Z}_1$ en facteur (ce sont celles qui proviennent de la multiplication de $\mathfrak{Z}_1$ par les quatre fonctions thêta distinctes du second ordre, de même caractéristique et de même parité que $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2$); il reste donc *dix* fonctions $\theta(u, v, w)$, auxquelles correspondent autant de surfaces cubiques adjointes linéairement distinctes. Mais d'ailleurs il n'y a que *dix* surfaces cubiques linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, puisque ces surfaces doivent passer par une cubique plane et un point non situé dans le plan de cette courbe : il en résulte que, réciproquement, toute surface cubique adjointe coupe $\mathfrak{S}$ suivant une ligne dont l'équation est de la forme $\theta(u, v, w) = 0$. Donc :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois ont pour équation générale $\theta(u, v, w) = 0$, en désignant par θ une fonction normale d'ordre trois, paire, et de caractéristique nulle; et réciproquement.

20. La fonction $\theta(u, v, w)$ peut contenir $\mathfrak{Z}_2$ en facteur : la surface cubique adjointe correspondante a alors un point *double* en O, et l'on en conclut aisément que :

Les courbes communes à $\mathfrak{S}$ et à ses adjointes d'ordre trois qui ont un point double en O (point triple de $\mathfrak{S}$) ont pour équation générale $\eta_1(v, u, w) = 0$, en désignant par η_1 une fonction normale d'ordre deux (paire) et de caractéristique nulle; et réciproquement.

Ces résultats se généraliseraient sans difficulté pour des surfaces adjointes d'ordre quelconque.

21. De là se déduisent quelques conséquences géométriques :

1° Le long de chacune des 30 biquadratiques situées sur $\mathfrak{S}$, on peut

circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les quatre droites (issues de O) qui rencontrent la biquadratique (n^os^ **11** et **15**).

Car si $\Im_h = 0$ est l'équation de la biquadratique, $\Im_h^2$ est une fonction normale paire, d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'annule pour quatre des demi-périodes qui annulent à la fois $\Im_1$ et les quatre Θ_i. De même :

2° Le long de chacune des 32 cubiques planes situées sur $\mathfrak{S}$, on peut circonscrire à cette surface une surface cubique adjointe, ayant un point double en O, et coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant les six droites (issues de O) qui rencontrent la cubique.

3° Les 30 biquadratiques sont situées, par groupes de trois, sur 60 surfaces cubiques adjointes à $\mathfrak{S}$.

Car, d'après le n° **5**, le produit des quatre fonctions thêta

$$\alpha\alpha'\beta'',\quad \alpha\beta'\beta'',\quad \beta\alpha'\beta'',\quad \beta\beta'\beta''$$

est pair et a sa caractéristique nulle; la fonction $\alpha\alpha'\beta''$, étant (n° **6**) la fonction $\Im_2$, a la même propriété; le produit des trois autres thêta est donc une fonction d'ordre trois, paire et de caractéristique nulle, c'est-à-dire que les trois biquadratiques $\alpha\beta'\beta''$, $\beta\alpha'\beta''$, $\beta\beta'\beta''$ sont sur une surface cubique adjointe à $\mathfrak{S}$.

On reconnaît ainsi que, à une de ces biquadratiques, par exemple $\alpha\alpha'\beta''$, on peut associer *six* couples d'autres biquadratiques, ce qui donne les six groupes

$$\left.\begin{array}{lll}
\alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\beta'', & \beta\beta'\beta'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \beta\alpha'\alpha'', & \beta\beta'\alpha'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\beta'', & \gamma\beta'\beta'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \gamma\alpha'\alpha'', & \gamma\beta'\alpha'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\beta'', & \delta\beta'\beta'' \\
\alpha\beta'\beta'', & \delta\alpha'\alpha'', & \delta\beta'\alpha''
\end{array}\right\}$$

de trois biquadratiques situées sur une surface cubique adjointe.

Six de ces surfaces cubiques passent donc par une biquadratique donnée, et, par suite, leur nombre total est égal à $\frac{30 \times 6}{3} = 60$.

Il résulte également de là que les tangentes menées en O aux 30 biquadratiques sont trois à trois dans 60 plans.

4° Il existe 240 groupes formés chacun de deux cubiques planes et d'une biquadratique de la surface $\mathfrak{S}$, et tels que les trois courbes d'un groupes soient sur une surface adjointe du troisième ordre ; celle-ci coupe en outre $\mathfrak{S}$ suivant deux droites passant par O.

Par exemple, les cubiques $\alpha\beta'\gamma''$, $\alpha\alpha'\gamma''$ et la biquadratique $\alpha\beta'\alpha''$ sont sur une surface cubique adjointe, qui contient les droites $(\alpha\gamma'\delta'')$ et $(\alpha\delta'\delta'')$; on en conclut que ces deux droites et la tangente en O à la biquadratique sont dans un même plan.

En étudiant ces relations de plus près, à l'aide de l'algorithme, on reconnaît que le plan déterminé par deux des droites de la surface $\mathfrak{S}$ (issues de O) et le plan des deux droites associées (n° **15**) se coupent suivant une droite qui touche, en O, une des 30 biquadratiques ; les 240 surfaces adjointes du troisième ordre définies plus haut ont quatre à quatre même plan tangent au point O, etc.

Application aux courbes de quatrième classe.

22. On sait que, sur une courbe plane de quatrième classe, les 28 points doubles sont situés 12 par 12 sur 63 courbes du troisième ordre, dont la théorie se rattache intimement à celle de la proposée : Steiner, qui a établi l'existence des 63 cubiques, n'a pas abordé l'étude des relations géométriques que ces courbes peuvent avoir entre elles ; il s'est borné à signaler l'intérêt de cette question ([1]), à laquelle se rapportent les remarques suivantes :

Soit toujours $\mathfrak{C}$ le cône de quatrième classe de sommet O circonscrit à la surface de Kummer K : c'est, comme on sait, un cône général de classe quatre, de même que les sections planes de K sont des courbes générales d'ordre quatre. Le cône $\mathfrak{C}$ a 28 droites doubles, qui sont les 12 bitangentes menées de O à la surface K, et les 16 droites qui joignent O aux points doubles de cette surface : d'après le théorème de Steiner, rappelé plus haut, les 28 droites doubles sont, 12 par 12,

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. 49, p. 272.

sur 63 cônes cubiques, qui sont ici les cônes de sommet O ayant respectivement pour directrices : 1° les 30 biquadratiques; 2° les 32 cubiques planes; 3° la cubique double, situées sur **S**. Chacun de ces cônes, en effet, contient bien douze droites de $\mathfrak{S}$, car : 1° une biquadratique passe par huit points doubles de K et rencontre quatre des douze bitangentes menées de O à K; 2° une cubique plane contient six points doubles et rencontre six bitangentes de K; 3° le cône, G, de sommet O, qui a pour base la cubique double, contient les douze bitangentes (n° **16**).

On obtient de cette manière une représentation géométrique des 63 cônes, dits *cônes cayleyens de* $\mathfrak{S}$ (n° **14**), et l'on met en évidence plusieurs de leurs propriétés.

23. La cubique double de **S** est située sur la polaire du point O par rapport à la surface K (n° **16**); les douze points où elle coupe cette surface sont donc sur la courbe de contact de K et du cône $\mathfrak{S}$, et les sections, par le plan de la cubique double, du cône $\mathfrak{S}$ et de la surface K, se touchent en ces douze points. Ainsi :

Une courbe de quatrième classe, $\mathfrak{S}^4$, est coupée par une quelconque de ses 63 cubiques cayleyennes (en dehors de 12 points doubles) en douze points simples : elle touche en ces douze points une courbe de quatrième ordre, C_4.

Nous verrons plus bas que les deux courbes $\mathfrak{S}^4$ et C_4 sont liées d'une manière intéressante.

24. Steiner a montré, dans le Mémoire cité plus haut, que les 63 cubiques cayleyennes de $\mathfrak{S}^4$ forment, trois à trois, des groupes remarquables : les trois cubiques γ, γ_1 et γ_2, d'un même *groupe de Steiner*, sont telles que, parmi les douze points doubles de $\mathfrak{S}^4$ que contient chacune d'elles, six appartiennent à la deuxième et les six autres à la troisième; les cubiques γ, γ_1, γ_2 ne contiennent donc, en tout, que 18 points doubles de $\mathfrak{S}^4$, répartis en trois systèmes de six, et, d'après Aronhold, les six points doubles de chaque système sont sur une conique. Il y a 336 groupes de Steiner, d'où $3 \times 336 = 1008$ coniques passant par six points doubles de $\mathfrak{S}^4$.

Cela posé, soient G_1 et G_2 deux cônes, de sommet O, ayant pour bases respectives deux cubiques de la surface $\mathfrak{S}$, situées dans un même plan : ces cônes, et le cône G qui a pour base la cubique double de $\mathfrak{S}$, forment évidemment un groupe steinérien de trois cônes cayleyens, par rapport au cône $\mathcal{S}$. Or les deux cubiques, bases de G_1 et G_2, ont neuf points communs, dont six sont les points doubles de K (et de $\mathfrak{S}$) contenus dans leur plan, et dont les trois autres sont nécessairement sur la courbe double de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire sur le cône G ; de plus ces trois derniers points sont en ligne droite, puisque la courbe double est plane. Donc :

Trois cubiques cayleyennes γ, γ_1 *et* γ_2, *d'une courbe de quatrième classe,* $\mathcal{S}^4$, *formant un groupe de Steiner, ont trois points communs; ces points sont sur une même droite,* Δ.

On en déduit une autre propriété : les cubiques γ et γ_1 se coupent en neuf points, dont trois sont sur Δ, et les six autres, qui sont des points doubles de $\mathcal{S}^4$, sur une conique, $\omega_2 = 0$; on a donc identiquement

$$\gamma - \gamma_1 = \Delta\omega_2,$$

et de même

$$\gamma - \gamma_2 = \Delta\omega_1 ;$$

d'où

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \Delta(\omega_1 - \omega_2),$$

c'est-à-dire que la conique $\omega_1 - \omega_2 = 0$, qui contient les six points doubles de $\mathcal{S}^4$ communs à γ_1 et γ_2, passe par les quatre points d'intersection des coniques ω_1 et ω_2. Ainsi :

Trois cubiques cayleyennes d'une courbe de quatrième classe, $\mathcal{S}^4$, *formant un groupe de Steiner, contiennent en tout* 18 *points doubles de* $\mathcal{S}^4$, *situés* 6 *à* 6 *sur trois coniques : ces trois coniques se coupent en quatre mêmes points.*

Ou encore :

Les 1008 *coniques qui contiennent chacune* 6 *points doubles de* $\mathcal{S}^4$ *se répartissent en* 336 *groupes de trois, de telle sorte que les*

3 *coniques d'un groupe n'aient en commun aucun point double de* $\mathfrak{S}^4$, *et se coupent en quatre mêmes points.*

Cette proposition peut s'énoncer d'une autre manière :

Les douze bitangentes menées d'un point O *à une surface de Kummer,* K, *se répartissent de* 16 *manières en deux groupes de six, les six bitangentes de chaque groupe étant sur un cône de second ordre* (propriété connue) : *les deux cônes qui correspondent ainsi aux deux groupes d'une même répartition se coupent suivant* 4 *droites, qui s'appuient sur une même conique de la surface de Kummer* (¹).

25. Une cayleyenne γ de $\mathfrak{S}^4$ appartient à $\frac{336 \times 3}{63} = 16$ groupes de Steiner; si γ est la cubique double de $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}^4$ étant la section du cône $\mathfrak{S}$ par le plan de cette cubique), les seize droites Δ, qui correspondent respectivement aux 16 groupes, sont les intersections du plan de γ avec

---

(¹) Le même théorème conduit à une propriété des surfaces de troisième classe. On sait, en effet (Geiser), que la section d'une telle surface par un plan tangent est une courbe de quatrième classe, qui admet pour points doubles les intersections du plan avec les 27 droites de la surface. D'ailleurs les 27 droites sont, 6 à 6, sur 360 quadriques (Cremona) qui, comme on le voit aisément, se groupent 3 à 3, de manière que les douze droites situées sur deux quadriques quelconques d'un groupe appartiennent à un même double-six (par exemple, dans la notation de M. Cremona, les quadriques qui contiennent respectivement les trois systèmes de six droites : $a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, b_6$; $b_1, b_2, b_3, a_4, a_5, a_6$; $c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{45}, c_{46}, c_{56}$ forment un des 120 groupes). En vertu du théorème énoncé dans le texte, les sections de trois quadriques d'un même groupe par un plan tangent *quelconque* de la surface de troisième classe se coupent en quatre mêmes points, d'où il résulte que les trois quadriques appartiennent à un même faisceau ponctuel. Donc :

Les 360 *quadriques qui contiennent six droites d'une surface de troisième classe se répartissent en* 120 *groupes de trois, de telle sorte que les trois quadriques d'un groupe se coupent suivant une même courbe du quatrième ordre.*

On voit aisément que cette courbe du quatrième ordre passe par 12 des 45 points triples de la surface de troisième classe, en sorte que : *les* 45 *points triples d'une surface de troisième classe sont situés, douze par douze, sur* 120 *biquadratiques.*

les seize plans singuliers de la surface de Kummer K : elles sont donc des tangentes doubles de la courbe du quatrième ordre, C_4, définie au n° **25**, et les propriétés connues de la surface de Kummer conduisent aux propositions suivantes sur les courbes $\mathfrak{S}^4$ et C_4 :

Une cubique cayleyenne, γ, *de* $\mathfrak{S}^4$ *appartient à* 16 *groupes de Steiner, à chacun desquels correspond* (n° **24**) *une droite*, Δ.

Les seize droites Δ *ainsi définies se coupent* 2 *à* 2 *en* 120 *points, qui sont respectivement sur les* 120 *droites joignant deux à deux les* 16 *points doubles de* $\mathfrak{S}^4$ *non situés sur* γ.

Les seize droites Δ *sont doublement tangentes à une même courbe du quatrième ordre*, C_4, *qui touche* $\mathfrak{S}^4$ *en douze points, situés sur la cubique* γ.

Les deux points de contact avec C_4 *de chacune des droites* Δ *sont sur une conique qui contient six points doubles de* $\mathfrak{S}^4$, *non situés sur* γ; *inversement : les deux tangentes menées à* $\mathfrak{S}^4$ *en un point double non situé sur* γ *sont tangentes à une conique qui touche six des droites* Δ.

D'autres propositions se déduiraient des résultats du n° **21** ; nous les avons énoncées dans une Note insérée aux *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (22 avril 1895); comme on peut les établir directement, sans s'appuyer sur les propriétés de la surface $\mathfrak{S}$, il nous paraît inutile d'y revenir ici.

Cas des fonctions abéliennes hyperelliptiques de genre trois.

26. On a supposé, dans l'étude de la surface $\mathfrak{S}$, définie analytiquement au n° **7**, que les fonctions thêta considérées ne provenaient pas d'une courbe de genre trois *hyperelliptique :* s'il en est autrement, la définition du n° **7** conduit toujours à une surface algébrique, que nous désignerons par $\mathfrak{T}$, mais dont le degré est *cinq*, au lieu de six.

En effet, ce qui caractérise le cas hyperelliptique, c'est qu'une des 64 fonctions thêta normales, *paires*, d'ordre un s'annule pour $u = v = w = 0$; d'où il résulte que chacune de ces 64 fonctions s'annule pour une demi-période qui n'est pas un de ses zéros dans le cas géné-

ral. Il est facile de voir qu'on peut appliquer l'algorithme du n° 5 de telle façon que les fonctions $pp'\alpha''$ et $pp'\beta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, et de même que les fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ s'annulent respectivement pour les demi-périodes $(pp'\alpha'')$ et $(pp'\beta'')$.

Cela posé, soient toujours $\alpha\alpha'\alpha''$ la fonction $\mathfrak{S}_1$ et $\alpha\alpha'\beta''$ la fonction $\mathfrak{S}_2$: les quatre fonctions Θ_i du n° **7** s'annulent pour les 32 demi-périodes $(pp'\gamma'')$ et $(pp'\delta'')$, dont l'une, $(\alpha\alpha'\gamma'')$, qui n'annulait pas $\mathfrak{S}_1$ dans le cas général, l'annule dans le cas hyperelliptique. De plus, cette demi-période compte pour *deux* dans le nombre des solutions communes aux trois équations $\Theta_i = 0$, $\Theta_j = 0$ et $\mathfrak{S}_1 = 0$; car si, par exemple, il s'agit de la demi-période $u = v = w = 0$, les Θ_i sont des fonctions impaires et $\mathfrak{S}_1$ une fonction paire. Il en résulte que le degré de $\mathfrak{T}$ est

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 2 \times 2 - 12 - 2) = 5.$$

La surface $\mathfrak{T}$ est donc du cinquième ordre.

27. D'après le n° **10**, la surface $\mathfrak{T}$ a seize points doubles, correspondant aux seize demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}_1$, sans annuler les Θ_i; aux deux fonctions $pp'\gamma''$ et $pp'\delta''$ correspondent (n° **11**) deux courbes de $\mathfrak{T}$ situées dans un même plan; ce plan qui, dans le cas général, contenait *six* points doubles de $\mathfrak{S}$, contient *sept* points doubles de $\mathfrak{T}$, car il renferme, en plus, un point double qui correspond à l'une des demi-périodes $(pp'\alpha'')$ ou $(pp'\beta'')$. En étudiant ainsi la répartition des points doubles entre les 16 plans, on voit qu'ils sont situés quatre à quatre sur huit droites, et, d'une manière plus précise, qu'ils sont à l'intersection de quatre droites ne se coupant pas avec quatre droites s'appuyant sur les premières : ces huit droites D sont d'après cela des génératrices d'une même quadrique, Q; quatre appartiennent à un système et quatre à l'autre système.

Comme dans le cas général, la surface a un point triple O; elle contient nécessairement les huit droites D ci-dessus, et le plan mené par O et par l'une d'elles touche $\mathfrak{T}$ le long de cette droite. Il en résulte que $\mathfrak{T}$ passe par la conique polaire de O par rapport à Q [1]. La sur-

---

[1] Cette conique correspond à la demi-période $(\alpha\alpha'\gamma'')$.

face $\mathfrak{T}$ contient également les 12 droites issues de O et qui s'appuient sur deux droites D non concourantes.

L'équation de $\mathfrak{T}$ s'obtient assez facilement, en partant de ces propriétés. Voici le résultat :

Soient $Q(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la quadrique Q; $H = 0$ celle d'un des systèmes de quatre plans tangents à Q qui découpent sur cette quadrique les huit droites D; si les coordonnées de O sont 0, 0, 0, 1, et si dans Q et H, les coefficients de la plus haute puissance de t sont égaux à l'unité, l'équation de $\mathfrak{T}$ est

$$(12) \qquad Q\left(H'_t - \tfrac{1}{6} Q H'''_{t^3}\right) + Q'_t (Q^2 - H) = 0.$$

On vérifie sans difficulté que cette surface possède toutes les propriétés indiquées ci-dessus; inversement, on peut établir sa liaison avec les fonctions hyperelliptiques, en suivant une marche analogue à celle indiquée par M. Darboux à propos de la surface de Kummer (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 1493).

Une droite issue de O coupe la surface $\mathfrak{T}$ en deux points mobiles; si donc on projette $\mathfrak{T}$, à partir du point O, sur un plan Π, à chaque point m de ce plan correspondront deux points M_1 et M_2 de $\mathfrak{T}$: M_1 et M_2 coïncideront lorsque m sera sur la trace du cône de sommet O circonscrit à $\mathfrak{T}$ (courbe de passage). Or ce cône, du huitième ordre, se décompose en huit plans, qui sont les huit plans menés par O et par les huit droites D, et qui d'ailleurs touchent le cône du second ordre, Σ, de sommet O, circonscrit à la quadrique Q. Si donc on représente le point m, du plan Π, par les deux paramètres, λ et μ, des deux plans tangents qu'on peut mener par ce point au cône Σ, les points M_1 et M_2 coïncideront lorsque λ ou μ prendra une des huit valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_8$ qui correspondent aux huit plans ci-dessus; en d'autres termes, les coordonnées de M_1 seront fonctions rationnelles des paramètres λ, μ et du radical $\sqrt{(\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_8)(\mu - a_1)\ldots(\mu - a_8)}$.

Observons, pour terminer, que les plans tangents au cône Σ coupent la surface $\mathfrak{T}$ suivant des courbes du cinquième ordre, hyperelliptiques, de genre trois, et de mêmes modules : car les modules d'une de ces courbes sont les rapports anharmoniques que forment, quatre à quatre, les huit tangentes qu'on peut lui mener par son point triple O; ces

huit tangentes sont les intersections du plan de la courbe avec les huit plans menés par O et les huit droites D, et leurs rapports anharmoniques (quatre à quatre) sont constants, puisque les huit plans et le plan mobile enveloppent un cône du second ordre, Σ. Ce sont les fonctions abéliennes appartenant à une des courbes hyperelliptiques considérées qui définissent analytiquement la surface $\mathfrak{T}$.

Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé;

PAR M. ÉMILE PICARD.

J'ai démontré autrefois (*voir* ce Journal, 4e série, t. VI, 1890) qu'une intégrale continue d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre est complètement déterminée, dans une région du plan où les caractéristiques sont imaginaires, par ses valeurs le long d'un contour fermé, *pourvu que ce contour soit suffisamment petit*, et j'ai montré comment, dans ces conditions, on pouvait obtenir l'intégrale par une méthode rigoureuse d'approximations successives. Dans quelques parties de mes raisonnements, je m'appuie sur la possibilité de faire une représentation conforme de l'aire envisagée sur un cercle, mais cet artifice a seulement pour but de simplifier et n'est pas indispensable; c'est ce qu'a, d'ailleurs, montré récemment M. Zaremba dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1896), au moins pour un des points de la démonstration, et il est aisé de voir qu'il en est de même pour les autres points. Cette remarque a son importance parce qu'elle établit que les considérations dont j'ai fait usage ne sont pas bornées au cas de deux variables indépendantes, mais s'étendent à un nombre quelconque de variables.

Une autre remarque est à faire relativement à l'expression de *contour suffisamment petit*. J'ai toujours entendu par là un contour dont tous les points s'éloignent suffisamment peu d'un certain point. Tous les résultats obtenus sont cependant encore applicables, si l'on élargit la

définition précédente, en entendant par contour suffisamment petit, un contour *enveloppant une aire suffisamment petite*, comme nous le montrerons facilement dans un moment.

Considérons maintenant, comme je l'ai fait en 1890 dans le *Journal de l'École Polytechnique*, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

les coefficients d, e, f étant des fonctions analytiques de x et y, continues dans une aire A; nous supposons, de plus, que l'on ait, dans cette région,

$$f < 0.$$

Il n'y a qu'une seule intégrale continue prenant sur tout contour fermé (tracé, bien entendu, dans A) une succession donnée de valeurs. Il s'agissait d'obtenir cette intégrale; la méthode indiquée d'approximations successives le permet seulement si l'aire limitée par le contour est assez petite. J'ai montré que l'on pouvait encore employer le procédé alterné, ce qui permet de traiter le problème pour un très grand nombre de contours C, mais (sauf le cas où d et e sont nuls) il peut subsister, au point de vue d'une rigueur complète, quelques difficultés à cause des discontinuités que présentent nécessairement les dérivées des valeurs données sur les contours. Il me paraît donc utile de reprendre le même problème par une autre voie beaucoup plus facile. Nous y trouverons d'ailleurs un autre avantage : *la méthode s'étendra d'elle-même au cas de plus de deux variables*, circonstance qui ne se présentait pas pour ma première méthode, car il faudrait, auparavant, faire une étude complète du procédé alterné pour l'espace à trois dimensions, étude qui semble n'avoir jamais été faite.

I.

J'ai dit plus haut que, au lieu de *contour suffisamment petit*, nous pouvons parler *d'aire suffisamment petite*. Il suffira de montrer (c'est le seul point qui puisse embarrasser) qu'une intégrale continue

d'une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

est déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé (simple ou non), pourvu que ce contour enveloppe une aire suffisamment petite. J'ai démontré seulement ce théorème (*Journal de Mathématiques*, 1890, p. 151) en supposant que le contour restait dans le voisinage d'un point. Pour bien préciser l'énoncé du théorème généralisé, nous pouvons dire que, étant donnée une courbe fermée quelconque C, on peut tracer une seconde courbe fermée C' limitant avec C une aire assez petite, de telle sorte qu'une intégrale continue s'annulant sur C et C' soit identiquement nulle dans l'aire.

Qu'on veuille bien se reporter au passage cité, et l'on verra de suite qu'il suffit d'établir qu'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(1) \qquad B^2 + B'^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \theta$$

par des fonctions B et B' de x et y continues dans l'aire limitée par la courbe C et par une courbe C' voisine de C. En désignant, en effet, par m^2 le maximum de $|\theta|$, l'inégalité sera vérifiée si

$$B^2 + B'^2 + m^2 = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}.$$

Or, on peut trouver des fonctions B et B' de x et y, bien déterminées et continues dans une aire annulaire limitée par deux courbes fermées Γ et Γ', suffisamment voisines et comprenant entre elles la courbe C. Ce problème est indéterminé; en voici une solution qui n'est sans doute pas la plus simple que l'on puisse citer: posons

$$B = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad B' = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

On aura l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + m^2.$$

Or, d'après ce que j'ai précédemment établi (Mémoire cité du *Journal de Mathématiques*, p. 162), on pourra trouver, si l'aire annulaire que limitent Γ et Γ' est suffisamment petite, une intégrale V de cette équation prenant des valeurs données sur Γ et Γ', continue et bien déterminée entre ces deux courbes. Cette valeur de V nous donne les valeurs de B et B dont nous avons besoin pour terminer le raisonnement.

Nous avons supposé que nous avions seulement deux variables; l'extension au cas de trois variables, par exemple, à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + 2f\frac{\partial u}{\partial z} + gu = 0$$

se fait sans aucune difficulté.

II.

J'arrive maintenant au principal objet de cet article. Considérons d'abord une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Dans toute région du plan, où les coefficients d et e sont bien déterminés et continus, une intégrale continue est bien déterminée par ses valeurs sur un contour fermé, car on démontre facilement (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 1890) qu'une telle intégrale ne peut avoir ni maximum ni minimum. Il s'agit d'obtenir l'intégrale, prenant des valeurs données sur un contour. Nous allons montrer, à cet effet, que si l'on peut obtenir cette intégrale pour un contour C, on pourra l'obtenir pour un contour C' suffisamment rapproché de C, mais enveloppant une aire plus grande, de telle sorte que l'on pourra passer de proche en proche à un contour quelconque, après être parti d'un contour enveloppant une aire suffisamment petite, pour lequel nous savons résoudre le problème.

Je commencerai par un lemme préliminaire : *Soit une aire limitée par deux contours* C *et* C', *et considérons une intégrale u de l'équa-*

tion proposée, continue dans l'aire, s'annulant en tous les points de C et prenant le long de C' des valeurs comprises entre $-M$ *et* $+M$. *Je dis que, pour un point A pris à l'intérieur de l'aire, on peut déterminer un nombre q inférieur à l'unité, tel que l'on ait*

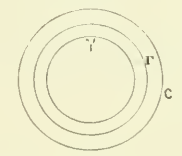
$$|u_A| < Mq.$$

En effet, soit v l'intégrale de l'équation prenant sur C la valeur *zéro* et sur C' la valeur *un*; on aura évidemment en tout point de l'aire,

$$-Mv < u < Mv.$$

Or, au point A, l'intégrale v prend une valeur q plus petite que l'unité, et le lemme est par suite établi. On voit que ce lemme suppose essentiellement que l'aire est limitée par plusieurs courbes; il subsiste pour le cas où il y a plus de deux courbes, les intégrales considérées prenant toujours la valeur zéro sur une des courbes.

Ceci posé, soit un contour Γ (que je suppose simple pour fixer les idées) pour lequel nous sachions résoudre le problème; je veux mon-



trer qu'on pourra le résoudre pour un contour C enveloppant Γ, si C est suffisamment rapproché de Γ.

Donnons-nous donc des valeurs sur C. Nous tracerons d'abord, à l'intérieur de Γ, une courbe fermée γ qui en soit très rapprochée; nous pouvons alors supposer que l'on sait résoudre le problème proposé pour l'aire suffisamment petite comprise entre γ et C. Fixons sur Γ une succession de valeurs arbitraires; nous formerons une intégrale u_1 continue dans Γ et prenant ces valeurs sur Γ. Cette fonction prendra certaines valeurs sur γ. On formera une fonction v_1, continue entre γ et C, prenant les mêmes valeurs que u_1 sur γ et prenant sur C les va-

leurs données. Considérons ensuite la fonction u_2 prenant sur Γ les mêmes valeurs que v_1 et continue dans Γ, et continuons ainsi indéfiniment. Nous obtenons deux suites de fonctions

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n,$$

et l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} u_n = v_{n-1} & (\text{sur } \Gamma), \\ u_n = v_n & (\text{sur } \gamma). \end{cases}$$

Tous les u sont continus dans Γ, les v sont continus entre γ et C et prennent tous sur cette dernière courbe les valeurs données.

Le lemme démontré plus haut permet aisément d'établir que u_n et v_n ont des limites u et v; on a alors

$$u = v$$

dans l'intervalle compris entre Γ et γ, et, à l'aide de ces deux fonctions, le problème est résolu.

Pour établir l'existence des limites, désignons par q le plus grand nombre (inférieur à 1) correspondant au lemme pour tous les points de Γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par γ et C.

On aura, d'après le lemme,

$$\text{max. de } |v_2 - v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |v_2 - v_1| \text{ sur } \gamma,$$

et par conséquent

$$\text{max. de } |v_2 - v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_2 - u_1| \text{ sur } \gamma.$$

Or

$$\text{max. de } |u_2 - u_1| \text{ sur } \gamma < \text{max. de } |u_2 - u_1| \text{ sur } \Gamma,$$

sans mettre de facteur q dans le second membre, car, pour l'aire simple limitée par Γ, nous ne pouvons pas appliquer le lemme. Il résulte de là, puisque

$$\text{max. de } |u_3 - u_2| \text{ sur } \Gamma = \text{max. de } |v_2 - v_1| \text{ sur } \Gamma$$

que l'on peut écrire

$$\text{max. de } |u_3 - u_2| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_2 - u_1| \text{ sur } \Gamma,$$

et l'on aura ainsi, d'une manière générale,

$$\text{max. de } |u_n - u_{n-1}| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_{n-1} - u_{n-2}| \text{ sur } \Gamma.$$

Il est clair alors que, sur la courbe Γ, la fonction

$$u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$$

tend vers une limite représentée par une série qui converge comme une progression géométrique décroissante, quand n augmente indéfiniment. La fonction u_n a donc une limite parfaitement déterminée u dans l'aire limitée par Γ, et il en est évidemment de même alors pour v_n qui aura une limite v définie dans l'aire que limitent γ et C. Des égalités (2), il résulte que $u = v$ dans l'intervalle compris entre Γ et γ.

On voit donc qu'en partant d'une aire (simple ou non) suffisamment petite, on peut, de proche en proche, étendre le champ d'intégration, et l'on arrive ainsi à une aire quelconque limitée par un nombre quelconque de contours.

On remarquera encore, et c'est là pour nous un point important, que *toute cette analyse s'applique, sans aucune modification, à l'espace à trois dimensions*, l'équation différentielle étant de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + 2f\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

et les courbes fermées étant remplacées par des surfaces fermées.

III.

Considérons maintenant une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

en supposant que le point (x, y) reste dans une région du plan où l'on

a partout

$$f < 0.$$

Une intégrale continue est alors toujours déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé. Les considérations que nous venons de développer peuvent s'appliquer presque sans modifications.

Il arrive même ici que le lemme prend une forme plus simple que dans le cas précédent. Désignons par u l'intégrale prenant sur un contour C (qui ici peut être simple) des valeurs comprises entre $-$ M et $+$ M. Je dis que, pour un point A à l'intérieur de l'aire, on peut trouver un nombre q inférieur à l'unité, tel que l'on ait

$$|u_A| < Mq.$$

Pour l'établir, rappelons d'abord qu'une intégrale u de l'équation précédente ne peut avoir de maximum positif ni de minimum négatif. Soit l'intégrale v prenant la valeur *un* sur C. Puisque v ne peut avoir de maximum positif, elle ne surpassera pas *un* à l'intérieur de l'aire; elle n'atteindra pas non plus cette valeur, car on aurait [1], au voisinage d'un point (x_0, y_0) où v prendrait la valeur *un* :

$$v = 1 + \alpha(x - x_0)^2 + 2\beta(x - x_0)(y - y_0) + \gamma(y - y_0)^2 + \dots.$$

On a nécessairement

$$\alpha \leqq 0, \quad \gamma \leqq 0, \quad \beta^2 - \alpha\gamma \leqq 0,$$

et la substitution donne

$$2(\alpha + \gamma) + f_0 = 0,$$

en désignant par f_0 la valeur de f en (x_0, y_0); cette inégalité est im-

---

(1) Nous supposons ici que les coefficients sont analytiques et que, par suite (Mémoire cité du *Journal de l'École Polytechnique*), l'intégrale est analytique. On pourrait se passer de cette hypothèse en faisant des raisonnements analogues à ceux que développe M. Paraf dans sa thèse (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1892). Je rappelle que j'ai indiqué récemment des classes très étendues d'équations aux dérivées partielles de tout ordre dont *toutes* les intégrales sont analytiques [*Comptes rendus* (juillet 1895)].

possible puisque f_0 est différent de zéro et négatif. L'intégrale v est donc moindre que un à l'intérieur de l'aire, et elle est d'ailleurs positive, ne pouvant avoir de minimum négatif. Soit q sa valeur au point A : la fonction

$$Mv - u,$$

étant positive sur C, sera positive dans l'aire, et par suite

$$u < Mv.$$

Pareillement, la différence

$$Mv + u$$

est positive sur C, et l'on aura, par suite,

$$u > -Mv.$$

Il résulte des deux inégalités précédentes

$$-Mq < u_A < Mq,$$

ce qui démontre le lemme énoncé.

Une fois le lemme établi, on peut répéter l'analyse développée plus haut. On pourra seulement employer, en quelque sorte, deux fois le lemme, et alors, si l'on désigne par q le plus grand nombre (inférieur à 1) correspondant au lemme, d'une part, pour tous les points de γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par Γ, et, d'autre part, pour tous les points de Γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par γ et C, on aura

$$\text{max. de } |u_n - u_{n-1}| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_{n-1} - u_{n-2}| \text{ sur } \Gamma,$$

les notations étant par ailleurs les mêmes; on voit que nous avons ici q^2 au lieu de q dans le second membre.

Il est presque inutile de faire encore la remarque que tout ceci s'applique immédiatement dans le cas d'un nombre quelconque de variables.

Je remarque, en terminant, que le procédé dont je viens de me ser-

vir, appliqué avec précautions, peut être utile dans beaucoup de cas; c'est ainsi que je l'ai employé (*Journal de Mathématiques*, 1893) pour l'étude des intégrales de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u \qquad (k > 0);$$

mais des difficultés réelles se présentaient, pour cette équation, qui ne se rencontrent pas dans les équations linéaires que nous venons d'étudier. Ici encore, on passe immédiatement de deux à trois variables, et nous pouvons par exemple obtenir de cette manière l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ke^u \qquad (k > 0),$$

prenant des valeurs données sur une surface fermée.

Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ et ζ;

PAR M. E. MATHY.

I. — Expression par les fonctions θ.

1. Soient a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde et m le point extérieur. Cet ellipsoïde se décompose en couches infiniment minces à surfaces homothétiques à l'ellipsoïde extérieur; désignons par α, β, γ les demi-axes d'une quelconque de ces couches.

Par m, faisons passer une couche homofocale à chacune des précédentes; soient α' β' γ' les demi-axes; $mn = e$ l'épaisseur de cette couche en m et $OQ = P'$ la distance du centre O de l'ellipsoïde au plan tangent en m, i le point d'intersection du rayon Om avec la surface intérieure de la couche passant par m.

Les deux triangles min et OQm donnent

$$e = \frac{OQ.\overline{mi}}{\overline{Om}} = \frac{P'd\gamma'}{\gamma'}.$$

Prenant $\frac{\gamma}{\gamma'} = u$ comme variable et désignant par X, Y, Z les composantes de l'attraction, on sait qu'on peut leur donner la forme sui-

vante [1] :

$$(1)\quad \begin{cases} X = -3Mm\dfrac{x}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \dfrac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ Y = -3Mm\dfrac{y}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \dfrac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Z = -3Mm\dfrac{z}{c^3}\displaystyle\int_0^{\frac{c}{c'}} \dfrac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Ces formules se réduisent à

$$X = -3Mm\frac{x}{c^3}\frac{d.l'F}{dl'}, \qquad Y = -3Mm\frac{y}{c^3}\frac{d.lF}{dl}, \qquad Z = -3Mm\frac{z}{c^3}.F,$$

F représentant l'intégrale

$$(2)\qquad F = \int_0^{\frac{c'}{c}} \frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Je me propose de rechercher la valeur de F. A cet effet, je pose

$$l'u = t,$$

d'où

$$du = \frac{1}{l'}dt, \qquad lu = \frac{l}{l'}t = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,t = ht;$$

h est réel et plus petit que 1, car dans l'ellipsoïde, on peut toujours supposer $a > b > c$.

Cette variable auxiliaire transforme l'expression de F qui devient

$$(3)\qquad F = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+h^2t^2)}}.$$

---

(1) *Voir*, par exemple, M. H. Resal, *Mécanique céleste*, 2e édition, p. 198.

Je fais la substitution

$$(4) \qquad t = \frac{\lambda(v)}{\mu(v)} \text{ [1]},$$

d'où

$$dt = \frac{\lambda'(v)\mu(v) - \mu'(v)\lambda(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\mu^2(v)\nu(v) + \lambda^2(v)\nu(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\nu(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

Comme (4) conduit à $\mu^2(v) = \frac{1}{1+t^2}$ et $\nu(v) = \sqrt{\frac{1+k'^2t^2}{1+t^2}}$, il vient

$$dt = \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}\,dv \qquad \text{ou} \qquad dv = \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}.$$

En comparant cette formule à (3), je remarque qu'on obtient, pour le module complémentaire, $k' = h = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$; k vaut $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

L'intégrale (3) prend la forme

$$(5) \qquad F = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}} \frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

La fonction $\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}$ a pour périodes ω et ω' et possède, dans le parallélogramme des demi-périodes, un seul pôle double $v = \frac{\omega}{2}$; la formule connue de M. Hermite

$$\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)} = \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} - D^2\log\theta_2(v)\right]$$

$\left(k' \text{ étant égal à } \frac{l}{l'}\right)$ permet d'écrire, après intégration,

$$(6) \qquad F = \frac{1}{l^2 l'}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - D\log\theta_2(v)\right].$$

La composante Z est donc déterminée en fonction de θ_2.

---

[1] Les notations λ, μ, ν; θ, θ_1, θ_2, θ_3 sont celles de Briot et Bouquet.

Pour obtenir Y, il faut dériver le produit $l\text{F}$ par rapport à l, avec cette remarque que v est indépendant de l puisque $\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = l'u$.

Quant à X, comme F est symétrique en l' et l, je suivrai la même règle pour déterminer sa valeur; à la limite supérieure, on aura

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c'}.$$

En remplaçant l et l par $\frac{(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$ et $\frac{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$, il vient les formules suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} \text{X} = \dfrac{3\text{M}mx}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \text{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c'}}, \\ \text{Y} = \dfrac{3\text{M}my}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)}\left[\dfrac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \text{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'}}, \\ \text{Z} = -\dfrac{3\text{M}mz}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)}\left[\dfrac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \text{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'}}. \end{cases}$$

2. Il est évident qu'on peut obtenir directement X et Y. Si l'on reprend la formule que suppose le calcul précédent $e = \frac{\text{OQ}.\overline{mi}}{\text{O}\overline{m}}$, et qu'au lieu d'égaler cette quantité e à $\frac{\text{P}'d\gamma'}{\gamma'}$, on l'égale à $\frac{\text{P}'d\alpha'}{\alpha'}$, alors, en prenant comme variable $\frac{\alpha}{\alpha'} = u_3$, des calculs semblables à ceux qui ont fourni Z ([1]) conduisent à

$$(8)\qquad \text{X} = -3\text{M}m\frac{x}{a^3}\int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u_3^2\,du_3}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

([1]) Resal, déjà cité, p. 196.

En vue de l'intégration, soit

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}u_3^2 = t_3^2,$$

d'où

$$du_3 = \frac{a}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_3, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2}u_3^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_3^2 = k^2 t_3^2,$$

k^2 ayant la même valeur que précédemment.

En ayant égard à ces valeurs, je puis écrire (8) sous la forme

$$(9)\qquad X = -3Mm\frac{x}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \frac{t_3^2\,dt_3}{(1-t_3^2)^{\frac{1}{2}}(1-k^2t_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $t_3 = \lambda(v_3)$, cette expression devient

$$(10)\qquad X = \frac{-3Mmx}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \lambda^2(v_3)\,dv_3.$$

Or, dans le parallélogramme des demi-périodes, la fonction doublement périodique $\lambda^2(v_3)$ possède un pôle double $\frac{\omega'}{2}$; en vertu du théorème de M. Hermite, on a

$$\lambda^2(v_3) = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D^2\log\theta(v)\right].$$

Conséquemment, en intégrant et remplaçant k^2 par $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$,

$$(11)\quad X = -\frac{3Mx}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-b^2)}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}v_3 - D\log\theta(v_3)\right]_{v_3=0}^{\lambda(v_3)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}}.$$

Pour calculer Y, je choisis comme variable $\frac{\beta}{\beta'} = u_2$; ainsi

$$(12)\qquad Y = -\frac{3Mmy}{b^3}\int_0^{\frac{b}{b'}} \frac{u_2^2\,du_2}{\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons encore $\frac{a^2-c^2}{b^2}u_2^2 = t_2^2$; il en résulte

$$du_2 = \frac{b}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_2,$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k^2 t_2^2,$$

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k'^2 t_2^2,$$

d'où

$$(12') \qquad Y = \frac{-3Mmy}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{t_2^2\,dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $t_2 = \frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}$, par des calculs analogues à ceux qui ont servi dans la recherche de Z, on obtient

$$dv_2 = \frac{dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3Mmy}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}dv_2.$$

La décomposition de $\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}$ se fait en remarquant que le pôle double est $\frac{\omega+\omega'}{2}$ et que, par suite,

$$\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)} = -\frac{1}{k^2k'^2}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - D^2\log\theta_3(v_2)\right],$$

d'où

$$(13) \quad Y = \frac{3Mmy(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}v_2 - D\log\theta_3(v_2)\right]_{v_2=0}^{\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}}.$$

Les variables v_1, v_2, v_3 sont égales aux limites d'intégration; aux limites inférieures, elles sont nulles toutes trois; aux limites supé-

rieures, on a

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'},$$

$$\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'},$$

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'},$$

et ces trois formules se ramènent aux trois suivantes :

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}, \qquad \lambda(v_2) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2 + b'^2}}, \qquad \lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2 + c'^2}},$$

qui sont égales à cause de la relation

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2.$$

On peut rapprocher ces nouvelles formes de X et Y de celle de Z et les écrire comme suit :

$$(14)\quad \begin{cases} X = \dfrac{3 M m x}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \left[-\dfrac{\theta''(0)}{\theta(0)} v \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\, D \log \theta(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\[2ex] Y = \dfrac{3 M m y}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left[-\dfrac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} v \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\, D \log \theta_3(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\[2ex] Z = \dfrac{3 M m z}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left[-\dfrac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} v \sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\, D \log \theta_2(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}. \end{cases}$$

II. — Intégration par les signes $\wp$ et ζ.

Dans le calcul suivant, les fonctions de M. Weierstrass ont été utilisées pour exprimer la valeur des intégrales précédentes.

Partant de

$$X = -\frac{3 M m x}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\, du}{\left(1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

je pose

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{1}{pv - e_3},$$

d'où

$$du = -\frac{1}{2}\frac{a p' v\, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne

$$X = \frac{3 M m x}{a^3}\int_0^{a'^2} \frac{a^2}{pv - e_3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a p' v\, dv}{2(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3 M m x}{2}\int_0^{a'^2} \frac{1}{(pv - e_3 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(pv - e_3 + c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\, \frac{p' v\, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}}.$$

La théorie de p conduit à poser

$$e_3 + a^2 - c^2 = e_1, \qquad e_3 + a^2 - b^2 = e_2,$$

puisque

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_3 = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2).$$

En remarquant que $p' v = -2\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}$, X deviendra

(15) $$X = -3 M m x \int_0^{a'^2} \frac{dv}{pv - e_3}.$$

Cette expression s'intègre en appliquant la formule

$$p(v + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pv - e_3};$$

alors

(16)
$$X = -\frac{3 M m x}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}\int_0^{a'^2} [p(v + \omega_3) - e_3]\, dv,$$

ou

$$X = \frac{3 M m x}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}[\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v],$$

ou encore

$$X = \frac{3 M m x}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}[\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v]$$

(v est défini par $pv - e_3 = d'^2$).

Y et Z prennent des formes analogues, en posant $\frac{u^2}{b^2} = \frac{1}{pv - e_2}$ pour le calcul de Y, et $\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{pv - e_1}$ pour celui de Z.

L'expression (16) de X ainsi que celles de Y et Z concordent avec celles que je déduis d'une formule donnée par Halphen ([1]).

P désignant le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur; a_1, a_2, a_3 les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde; α, β, γ l'un des trois nombres 1, 2, 3, on a

$$(17)\quad P = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\left\{u + \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}\left[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u\right]\right\},$$

la transcendante u est définie par

$$pu = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - r_1,$$

r_1 étant la racine négative de $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{a_\alpha - s} = 1$.

Je dérive (17) par rapport à x_α et j'obtiens

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx_\alpha} = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\Bigg\{ & \frac{du}{dx_\alpha} + \frac{2x_\alpha}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\beta - a_\gamma)}\left[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u\right] \\ & + \frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}\left[-p(u+\omega_\alpha) + e_\alpha\right]\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Cette valeur se simplifie, car, en remplaçant $p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha$ par $\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha}$ dans la troisième partie de la somme entre accolades, il vient

$$\begin{aligned} &- \frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}\left[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha\right] \\ &\quad = -\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = -\frac{du}{dx_\alpha}, \end{aligned}$$

puisque $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = 1$ et que $(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$.

([1]) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, 2e Partie, p. 492.

Cette valeur étant reportée dans (18), on conclut

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx_\alpha} = \dfrac{4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}\left[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u\right] \\ \qquad = \dfrac{3 M x_\alpha}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}\left[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u\right]. \end{cases}$$

M est la masse de l'ellipsoïde.

Note. — P a été obtenu par la considération de l'équation des potentiels avec les arguments elliptiques; je vais établir directement cette question.

On sait que, si x_α est une coordonnée rectiligne, $T = f(x_\alpha)$ satisfait à l'équation des potentiels, si $\sum\limits_\alpha \dfrac{d^2T}{dx_\alpha^2} = 0$. Mais, x_α étant fonction des arguments u, v, w, cette égalité se transforme en

$$(1)\quad \sum_\alpha \left[\frac{d^2T}{du^2}\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 + 2\frac{d^2T}{du\,dv}\frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} + \ldots + \frac{dT}{dx_\alpha}\frac{d^2u}{dx_\alpha^2} + \ldots\right] = 0.$$

Il faut calculer séparément $\left(\dfrac{du}{dx_\alpha}\right)^2$, $\dfrac{du}{dx_\alpha}\dfrac{dv}{dx_\alpha}$, $\dfrac{d^2u}{dx_\alpha^2}$, s'appuyant sur

$$(2)\quad x_\alpha^2 = \frac{(\wp u - e_\alpha)(\wp v - e_\alpha)(\wp w - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

Comme la quantité $\sum\limits_\alpha \dfrac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2}$ entre dans ces expressions, j'en cherche la valeur. De (2), je tire

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2} = \sum_\alpha \frac{(e_\alpha - \wp v)(e_\alpha - \wp w)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)} \times \frac{1}{\wp u - e_\alpha} \\ \qquad = \dfrac{(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)}{(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)} = \dfrac{4(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)}{\overline{\wp' u}^2}. \end{cases}$$

L'équation $\sum\limits_\alpha \dfrac{x_\alpha^2}{\wp u - e_\alpha} = 1$, dérivée par rapport à x_α, donne

$$(3')\quad \frac{2x_\alpha}{\wp u - e_\alpha} - \wp' u \frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2} = 0$$

qui s'écrit, en vertu de (3),

(4) $$\frac{du}{dx_\alpha} = \frac{x\,\wp u}{2(\wp u - e_\alpha)(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)}.$$

Donc,

$$\sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2} \times \frac{\wp' u^2}{4(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)^2}.$$

A cause de (3), il vient

(5) $$\sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)}.$$

Je reprends la formule (4) pour la multiplier par la valeur analogue $\frac{dv}{dx_\alpha}$, et j'étends le produit aux x_α.

$$\sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)(\wp v - e_\alpha)} \frac{\wp' u\, \wp' v}{4\overline{(\wp u - \wp v)}^2(\wp u - \wp w)(\wp w - \wp v)}.$$

Mais $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)(\wp v - e_\alpha)} = 0$; donc

(6) $$\sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = 0.$$

Je dérive l'équation (3′) une seconde fois par rapport à x_α, et j'obtiens

$$\frac{2}{\wp u - e_\alpha} - \frac{4x_\alpha \wp' u}{(\wp u - e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} - \wp'' u \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2}$$
$$+ 2\overline{\wp' u}^2 \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^3}$$
$$- \wp' u \frac{d^2 u}{dx_\alpha^2} \sum \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^2} = 0.$$

Dans la somme relative à x_α, le premier et le troisième terme s'annuleront; en effet, le troisième terme, déduit des valeurs précédentes, est égal à $-\frac{4\wp'' u}{\overline{\wp' u}^2}$; le premier terme vaut $+\frac{4\wp'' u}{\overline{\wp' u}^2}$, car

$$\overline{\wp' u}^2 = 4(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta)(\wp u - e_\gamma)$$

et

$$\wp'' u = 2[(\wp u - e_\alpha)(\wp u - e_\beta) + \ldots].$$

Le deuxième et le quatrième terme se réduisent à o également; en effet, si je substitue à $\frac{du}{dx_\alpha}$ sa valeur donnée par (4), le deuxième terme devient

$$-\frac{4x_\alpha \wp' u}{(\wp u - e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} = -\frac{2x_\alpha^2 \overline{\wp' u}^2}{(\wp u - e_\alpha)^3(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)},$$

et en sommant, on obtient

$$\frac{-2\wp' u^2}{(\wp u - \wp v)(\wp u - \wp w)}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\wp u - e_\alpha)^3},$$

et à cause de (5)

$$-2\overline{\wp' u}^2 \sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x^2{}_\alpha}{(\wp u - e_\alpha)^3},$$

qui est bien égal et de signe contraire au quatrième terme qui figurera dans la somme.

Finalement,

$$\sum_\alpha \frac{d^2 u}{dx_\alpha^2} = 0,$$

et (1) se transforme en

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{du^2}(\wp v - \wp w) + \frac{d^2\mathrm{T}}{dv^2}(\wp w - \wp u) + \frac{d^2\mathrm{T}}{dw^2}(\wp u - \wp v) = 0,$$

qui est l'équation des potentiels.

Sur la construction des Cartes géographiques;

PAR M. D.-A. GRAVÉ,
Professeur à Saint-Pétersbourg.

Dans les deux célèbres Mémoires *Sur la construction des Cartes géographiques*, Lagrange a trouvé toutes les projections orthomorphes d'une surface de révolution dont les méridiens et les parallèles sont rectilignes ou circulaires.

Il restait jusqu'à présent à résoudre le pareil problème pour les Cartes équivalentes, c'est-à-dire pour les Cartes qui conservent les aires.

J'ai réussi à résoudre complètement ce problème, qui présentait certaines difficultés, et j'espère que ma solution pourra intéresser les géomètres.

Nous appellerons dans tout ce qui suit les projections *rectilignes*, quand les deux systèmes, les méridiens ainsi que les parallèles, sont représentés par des droites; projections *mixtes*, quand les méridiens sont représentés par des droites et les parallèles par des cercles, ou *vice versa;* enfin, nous les appellerons projections *circulaires*, quand les deux systèmes sont représentés par des cercles.

Soit donnée une surface S par les équations

$$x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v), \qquad z = \Omega(u, v),$$

où u, v sont les coordonnées curvilignes.

On peut faire correspondre aux points (u, v) de la surface les points (x, y) d'un plan, où x, y sont les coordonnées rectangulaires.

Si nous prenons deux fonctions $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, finies et continues pour un certain domaine des variables u, v, les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

donneront une certaine représentation (projection, carte) d'une partie de la surface S, ou cette surface tout entière.

Pour que la projection soit équivalente, il faut que les fonctions φ et ψ satisfassent à l'équation différentielle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \mathrm{K}\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2},$$

où K est une constante et les fonctions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont les coefficients de l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = \mathcal{E}\,du + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2.$$

Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas de la surface de révolution

$$x = \varphi(u)\cos v, \qquad y = \varphi(u)\sin v, \qquad z = u,$$

où v est la longitude, et u peut être pris, ou pour la latitude même, ou pour sa fonction.

Alors on a

$$\mathcal{E} = 1 + [\varphi'(u)]^2, \qquad \mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{G} = [\varphi(u)]^2$$

et nous obtiendrons l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \Omega(u),$$

où

$$\Omega(u) = \mathrm{K}\,\varphi(u)\sqrt{1 + [\varphi'(u)]^2}.$$

En prenant au lieu de u la nouvelle variable indépendante

$$\mathcal{V} = \int \Omega(u)\,du,$$

nous parvenons à l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \mathcal{V}}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial \mathcal{V}} = 1.$$

Si nous prenions, au lieu de la variable v, une nouvelle $\mathfrak{v}$ qui soit une fonction de v, nous aurions l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \mathcal{V}}\frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}} - \frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial y}{\partial \mathcal{V}} = \mathfrak{w},$$

où $\mathfrak{w}$ est une fonction de $\mathfrak{v}$.

Ainsi, nous voyons que, indépendamment de la forme de la surface de révolution donnée, la recherche des Cartes équivalentes dépend de la considération de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1.$$

Prenons pour les nouvelles variables indépendantes x et v, leurs fonctions seront y et u, ainsi que

$$y = \omega(x, v), \qquad u = \lambda(x, v).$$

L'équation se transformera en la suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Nous aurons la solution générale de l'équation (1) de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} y = f'_x(x, v), \\ u = f'_v(x, v), \end{cases}$$

où f est une fonction arbitraire.

En prenant x et v pour les variables indépendantes, nous avons exclu le cas de $x = \mu(v)$; dans ce cas, la solution obtient la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \mu(v), \\ y = \nu(v) - \dfrac{u}{\mu'(v)}, \end{cases}$$

où μ et ν sont des fonctions arbitraires.

L'expression de la solution générale du problème, à l'aide des formules (2) et (3), va jouer un rôle très important; nous allons en montrer les conséquences.

Considérons d'abord le problème général.

Il faut trouver les fonctions

$$(4) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

qui satisfont à l'équation (1) et qui donnent, pour les méridiens et les parallèles, des courbes d'une espèce donnée.

En éliminant la latitude u entre les équations (4), nous obtenons l'équation des méridiens qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$(5) \qquad y = f(x, v).$$

De la même manière, l'équation des parallèles aura la forme

$$(6) \qquad y = F(x, u).$$

En différentiant l'équation (5), nous obtenons

$$y'_u = f'_x x'_u; \qquad y'_v = f'_x x'_v + f'_v.$$

En substituant dans l'équation (1), nous obtenons

$$f'_v x'_u = 1.$$

En intégrant par rapport à u, nous aurons

$$\int f'_v(x, v)\, dx = u + w,$$

où w est une fonction arbitraire de v et l'intégrale est prise en considérant v constante. Cette équation obtient la forme

$$(7) \qquad \omega(x, v) = u + w.$$

Si la forme des méridiens est donnée, la fonction ω s'exprime explicitement par rapport à x, tandis que la variable v y entre implicitement comme l'argument des paramètres, inconnu, de l'équation des méridiens.

Prenons compte de la forme donnée des parallèles.

Si nous disons que la forme des parallèles est donnée, cela signifie que, dans l'équation (6), la partie F est donnée comme une fonction explicite de x, dont les paramètres sont les fonctions arbitraires de u.

Nous pouvons éliminer de l'équation (6) la variable u, au moyen de la différentiation, en d'autres termes, nous pouvons écrire l'équation différentielle des parallèles, en considérant u comme constante. Toutes les différentiations seront évidemment faites par rapport à v.

Comme nous aurons, dans tout ce qui suit, presque exclusivement les dérivées prises par rapport à v, nous écrirons les dérivées de x et y, prises par rapport à v, tout simplement

$$x', \quad y', \quad x'', \quad y'', \quad \ldots.$$

Alors soit l'équation différentielle des parallèles de la forme

$$(8) \qquad \Omega(x, y, x', y', x'', y'', \ldots) = 0.$$

En différentiant l'équation (5) par rapport à v, nous aurons

$$y' = f'_x x' + f'_v,$$
$$y'' = f_x x'' + f''_{xx} x'^2 + 2 f''_{xv} x' + f''_{vv},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules permettent de faire disparaître de l'équation (8) les quantités $y, y', y'', \ldots$.

Nous obtenons l'équation

$$(9) \qquad \Pi(v, x, x', x'', \ldots) = 0.$$

On peut éliminer les dérivées de x dans l'équation (9) au moyen de l'équation (7). En effet, en différentiant l'équation (7), nous aurons

$$\omega'_x x' + \omega'_v = w',$$

d'où l'on a

$$x' = \xi_1(x, v).$$

En différentiant, nous aurons

$$x'' = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \xi_2(x, v), \qquad \ldots$$

En substituant dans l'équation (9) au lieu des quantités x', x'', ... les fonctions $\xi_1(x, v)$, $\xi_2(x, v)$, ..., nous aurons définitivement l'équation

$$(10) \qquad \Psi(x, v) = 0.$$

Il faut bien remarquer que x entre dans cette dernière équation d'une façon explicite.

Cette équation doit être une identité, car autrement elle déterminerait x comme fonctions de v seule, ce qui est impossible, car, dans ce cas, l'équation (7) donnerait la liaison entre u et v, introduites comme variables indépendantes. Il est évident aussi que x ne peut pas devenir constante.

Résoudre le problème posé n'est autre chose que satisfaire à l'identité (10) de la manière la plus générale.

Quand on trouvera les expressions des paramètres de l'équation (5) en fonction de v et la fonction w, de la façon la plus générale à satisfaire à l'identité (10), on aura les projections complètement déterminées par les équations (5), (7).

En revenant à notre problème des réseaux rectilignes ou circulaires, il est aisé de voir que, quand on a une projection quelconque de cette

espèce, on obtiendra immédiatement une autre de la même espèce en changeant les rôles des méridiens et des parallèles.

Ainsi nous voyons que notre problème peut être partagé en deux autres : 1° trouver toutes les projections rectilignes et mixtes qui aient les méridiens rectilignes ; 2° trouver toutes les projections circulaires.

Considérons d'abord le problème suivant :

Trouver toutes les représentations de la surface de révolution sur un plan, qui conservent les aires, dont les méridiens soient représentés par des droites et les parallèles soient rectilignes ou circulaires.

Prenons l'équation différentielle des projections sous la forme

$$x'_v y'_u - x'_u y'_v = V, \tag{11}$$

où u, v sont des fonctions de la latitude et de la longitude, V étant fonction de v.

Nous considérerons d'abord le cas général, où les méridiens sont représentés par des droites enveloppées par une certaine courbe Σ. De cette façon, nous laissons à part les deux cas suivants : 1° les méridiens se croisent dans un point ; 2° les méridiens sont parallèles entre eux. Nous examinerons ces deux cas plus tard.

Prenons pour la variable indépendante v l'arc de la courbe Σ dont tous les méridiens sont tangents. Alors, en désignant par a, b les coordonnées du point de contact d'un certain méridien avec la courbe Σ, nous pouvons considérer les coordonnées a, b comme fonctions de v, satisfaisant à l'équation

$$a'^2 + b'^2 = 1.$$

Les coordonnées x, y d'un point quelconque N de la courbe peuvent être exprimées par des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= a + \rho a', \\ y &= b + \rho b', \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où ρ est une certaine fonction de u et v.

Introduisons la courbure

$$k = a''b' - b''a'$$

de la courbe Σ.

En substituant les formules (12) dans l'équation (11), nous aurons

$$\rho\rho'_u(a''b' - a'b'') = V.$$

En intégrant par rapport à u, on a

$$\rho^2 k = 2Vu + \sigma,$$

σ étant une fonction de v introduite par l'intégration.

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(13) \qquad \rho^2\mu = 2u + w,$$

où

$$\mu = \frac{k}{V}, \qquad w = \frac{\sigma}{V}.$$

Le problème consiste à trouver la fonction ρ, c'est-à-dire les fonctions μ et w, de sorte que les parallèles soient rectilignes ou circulaires.

Prenons l'équation différentielle des parallèles circulaires

$$3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - x'''y') = 0,$$

où les dérivées sont prises par rapport à v. Désignons, dans tout ce qui suit, par

$$\rho', \quad \rho'', \quad \ldots$$

les dérivées prises par rapport à v.

Formons l'expression

$$x'y'' - y'x''.$$

$$x' = a'(1 + \rho') + \rho a'', \qquad y' = b'(1 + \rho') + \rho b'',$$

$$x'' = a'\rho'' + a''(1 + 2\rho') + \rho a''', \qquad y'' = b'\rho'' + b''(1 + 2\rho') + b'''\rho,$$

on obtient

$$x'y'' - x''y' = k[\rho\rho'' - (1+\rho')(1+2\rho')] \\ - k'\rho(1+\rho') - \rho^2(a'''b'' - a''b'''),$$

et l'on sait que l'on a

$$a'''b'' - b'''a'' = k^3\ (^1).$$

Nous obtenons ainsi

$$x'y'' - x''y' = k[\rho\rho'' - (1+\rho')(1+2\rho')] - k'\rho(1+\rho') - k^3\rho^2.$$

Dans cette expression, on peut supprimer les dérivées ρ', ρ'' en différentiant l'équation (13) par rapport à v

$$(14)\qquad 2\rho\rho'\mu + \rho^2\mu' = \varpi'.$$

$$(15)\qquad 2(\rho'^2 + \rho\rho'')\mu + 4\rho\rho'\mu' + \rho^2\mu'' = \varpi''.$$

En substituant l'expression $2\rho\rho''\mu$ de (15) dans $2\mu(x'y'' - x''y')$, on obtient

$$(16)\qquad 2\mu(x'y'' - x''y') = A_0\rho'^2 + A_1\rho' + A_2,$$

où

$$A_0 = -6k\mu,$$
$$A_1 = -6k\mu - 2\rho(k'\mu + 2k\mu'),$$
$$A_2 = \quad k\varpi'' - 2k\mu - 2k'\mu\rho - \rho^2(k\mu'' + 2k^3\mu).$$

En multipliant l'équation (16) par $4\rho^2\mu^2$, on aura

$$8\rho^2\mu^3(x'y'' - y'x'') = A_0(2\rho\rho'\mu)^2 + 2\rho\mu A_1(2\rho\rho'\mu) + 4\rho^2\mu^2 A_2.$$

Au moyen de l'équation (14), nous aurons

$$8\rho^2\mu^3(x'y'' - x''y') = A_0(\varpi' - \rho^2\mu')^2 + 2\rho\mu A_1(\varpi' - \rho^2\mu') + 4\rho^2\mu^2 A_2 \\ = 2\mu[M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + M_2\rho^2 + M_3\rho + M_4]$$

---

(1) *Voir* CH. HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 157; 1873.

où

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \quad k\mu'^2 + 2k'\mu\mu' - 2\mu(k\mu'' + 2\mu k^3),\\
M_1 &= \quad 6k\mu\mu' - 4k'\mu^2,\\
M_2 &= \quad 6k\mu'\alpha' - 2\alpha'(k'\mu + 2k\mu') + 2\mu(k\alpha'' - 2k\mu),\\
M_3 &= -6k\mu\alpha',\\
M_4 &= -3k\alpha'^2.
\end{aligned}
$$

En divisant par 2μ, on aura

$$
(17) \qquad 4\rho^2\mu^2(x'y'' - x''y') = M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + M_2\rho^2 + M_3\rho + M_4.
$$

De même façon, nous aurons

$$
4\rho^2\mu^2(x'^2 + y'^2) = P_0\rho^4 + P_1\rho^3 + P_2\rho^2 + P_3\rho + P_4
$$

où

$$
P_0 = \mu'^2 + 4\mu^2k^2, \qquad P_1 = -4\mu\mu', \qquad P_2 = -2\mu'\alpha' + 4\mu^2,
$$
$$
P_3 = 4\mu\alpha', \qquad P_4 = \alpha'^2.
$$

Il ne reste qu'à trouver les expressions $x'x'' + y'y''$, $x'y''' - x'''y'$. En différentiant, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
8\rho^2\mu^2(x'x'' + y'y'') = {} & P'_0\rho^4 + P'_1\rho^3 + P'_2\rho^2 + P'_3\rho + P'_4\\
& + [4\rho^3P_0 + 3\rho^2P_1 + 2\rho P_2 + P_3]\rho'\\
& - 4\mu(x'^2 + y'^2)[2\rho\rho'\mu + 2\rho^2\mu'].
\end{aligned}
$$

En éliminant de cette expression la quantité ρ', nous aurons

$$
\begin{aligned}
16\rho^4\mu^3(x'x'' + y'y'') = {} & R_0\rho^6 + R_1\rho^5 + R_2\rho^4 + R_3\rho^3 + R_4\rho^2\\
& + R_5\rho + R_6
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 2\mu P'_0 - 6\mu' P_0, & R_3 &= 2\mu P'_3 - 3\mu' P_3 + \alpha' P_1,\\
R_1 &= 2\mu P_1 - 5\mu' P_1, & R_4 &= 2\mu P'_4 - 2\mu' P_4,\\
R_2 &= 2\mu P'_2 - 4\mu' P_2 + 2\alpha' P_0, & R_5 &= -\alpha' P_3,\\
& & R_6 &= -2\alpha' P_4.
\end{aligned}
$$

En différentiant l'équation (17), on obtient

$$\begin{aligned}4\rho^2\mu^2(x'y''' - x'''y') = {} & M'_0\rho^4 + M'_1\rho^3 + M'_2\rho^2 + M'_3\rho + M'_4 \\ & + \rho'[4M_0\rho^3 + 3M_1\rho^2 + 2M_2\rho + M_3] \\ & - 4\mu(x'y'' - y'x'')[2\rho\rho'\mu + 2\rho^2\mu'];\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\begin{aligned}8\rho^4\mu^3(x'y''' - x'''y') = {} & N_0\rho^6 + N_1\rho^5 + N_2\rho^4 + N_3\rho^3 + N_4\rho^2 \\ & + N_5\rho + N_6,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} N_0 &= 2\mu M'_0 - 6\mu' M_0, & N_3 &= 2\mu M'_3 - 3\mu' M_3 + \omega' M_1, \\ N_1 &= 2\mu M'_1 - 5\mu' M_1, & N_4 &= 2\mu M'_4 - 2\mu' M_4, \\ N_2 &= 2\mu M'_2 - 4\mu' M_2 + 2\omega' M_0, & N_5 &= -\omega' M_3, \\ & & N_5 &= -2\omega' M_4. \end{aligned}$$

L'équation différentielle d'un cercle se transforme en la suivante :

$$\begin{aligned}3[R_0\rho^6 + R_1\rho^5 + \ldots + R_6][M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + \ldots + M_4] \\ - 2[P_0\rho^4 + P_1\rho^3 + \ldots + P_4][N_0\rho^6 + N_1\rho^5 + \ldots + N_6] = 0.\end{aligned}$$

En ouvrant les parenthèses, nous obtenons l'équation

$$(18) \qquad \mathfrak{M}_0\rho^{10} + \mathfrak{M}_1\rho^9 + \ldots + \mathfrak{M}_9\rho + \mathfrak{M}_{10} = 0.$$

La fonction ρ contient nécessairement u qui doit être indépendante de v. L'équation (18) doit être satisfaite identiquement, d'où il vient

$$(19) \qquad \mathfrak{M}_0 = 0, \quad \mathfrak{M}_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{16} = 0.$$

Pour résoudre la question, il ne reste qu'à satisfaire à ce système de la manière la plus générale.

L'équation $\mathfrak{M}_{10} = 0$ donne

$$3R_6M_4 - 2P_4N_6 = 6k\omega'^5 = 0.$$

D'après la nature de la question, k ne peut être égal à zéro, par conséquent il faut poser $\omega' = 0$.

Tout le calcul se simplifie considérablement, car on a

$$M_3 = M_4 = P_3 = P_4 = 0$$

et par conséquent

$$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 0.$$

Notre équation (18) devient

$$\begin{aligned} 3[R_0\rho^2 + R_1\rho + R_2][M_0\rho^2 + M_1\rho + M_2] \\ - 2[P_0\rho^2 + P_1\rho + P_2][N_0\rho^2 + N_1\rho + N_2] = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients de cette équation, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{gathered} 3R_0M_0 - 2N_0P_0 = 0, \\ 3(R_1M_0 + M_1R_0) - 2(P_0N_1 + P_1N_0) = 0, \\ 3(M_0R_2 + M_1R_1 + M_2R_0) - 2(P_0N_2 + P_1N_1 + P_2N_0) = 0, \\ 3(M_1R_2 + M_2R_1) - 2(P_1N_2 + P_2N_1) = 0, \\ 3M_2R_2 - 2P_2N_2 = 0. \end{gathered}$$

Considérons la dernière équation. Si l'on a $\omega' = 0$, on obtiendra

$$M_2 = -4k\mu^2, \qquad P_2 = 4\mu^2, \qquad N_2 = -8k'\mu^3, \qquad R_2 = 0,$$

d'où

$$3M_2R_2 - 2P_2N_2 = 64k'\mu^5 = 0;$$

d'après les conditions du problème, μ n'est pas égal à zéro et par conséquent

$$k' = 0.$$

La courbure k de la courbe Σ doit être constante et par conséquent la courbe elle-même est un cercle.

Pour la détermination de la fonction μ, nous obtenons le système

$$3 R_0 M_0 - N_0 P_0 = 0,$$
$$3(R_1 M_0 + M_1 R_0) - 2(P_0 N_1 + P_1 N_0) = 0,$$
$$3(R_1 M_1 + M_2 R_0) - 2(P_1 N_1 + P_2 N_0) = 0.$$

En éliminant R_0 et N_0, nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} M_0 & P_0 & 0 \\ M_1 & P_1 & 3R_1 M_0 - 2P_0 N_1 \\ M_2 & P_2 & 3R_1 M_1 - 2P_1 N_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on aura

$$(2\mu\mu'' - 3\mu'^2)[(3\mu'^2 - 2\mu\mu'')^2 + 4k^3\mu^2\mu'^2] = 0.$$

Le facteur $(3\mu'^2 - 2\mu\mu'')^2 + 4k^2\mu^2\mu'^2$ égalé à zéro donne

$$\mu' = 0.$$

Si l'on a $2\mu\mu'' - 3\mu'^2 = 0$, on aura

$$R_1 = 0, \qquad N_1 = 0, \qquad N_0 = 8k^3\mu^2\mu'.$$

L'équation $3 R_0 M_2 - 2 N_0 P_2 = 0$ donne

$$32 k^3 \mu^4 \mu' = 0,$$

d'où l'on a

$$\mu' = 0.$$

Si l'on a $N_0 = R_0 = 0$, on aura

$$3R_1 M_1 - 2P_1 N_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad -24k\mu^2\mu'(2\mu\mu'' - 3\mu'^2) = 0,$$

d'où l'on a

$$\mu' = 0.$$

Ainsi nous voyons qu'on a $\mu = \text{const.}$

Nous obtenons ainsi les projections, dont les parallèles sont les cercles concentriques et les méridiens sont les droites tangentes d'un de ces cercles.

En examinant le cas des parallèles rectilignes, nous parvenons à une contradiction.

Considérons le cas où la courbe Σ se réduit en un point auquel se croisent tous les méridiens.

Prenons le point de rencontre des méridiens pour origine des coordonnées, alors les méridiens seront exprimés par l'équation

$$y = ax, \tag{20}$$

où a est une fonction de v seule.

En différentiant l'équation (20), on obtient, après la substitution dans l'équation (1), l'égalité

$$a' x x'_u = 1,$$

d'où l'on obtient, en intégrant par rapport à u,

$$\frac{a'}{2} x^2 = u + \omega, \tag{21}$$

où ω est une fonction de v.

En désignant par x', y', x'', y'', ... les dérivées prises par rapport à v, nous aurons

$$x'y'' - x''y' = a''xx' + 2a'x'^2 - a'xx'',$$
$$x'^2 + y'^2 = (1 + a^2)x'^2 + 2aa'xx' + a'^2x^2.$$

On peut éliminer les dérivées x', x'' au moyen de l'équation (21). En effet, différentiant deux fois cette équation

$$a'xx' + \frac{a''}{2}x^2 = \omega',$$

$$a'xx'' + a'x'^2 + 2a''xx' + \frac{a'''}{2}x^2 = \omega'',$$

nous obtenons définitivement

$$(22) \qquad a'x^2(x'y'' - y'x'') = M_0 x^4 + M_1 x^2 + M_2,$$

où

$$M_0 = \tfrac{1}{4}(2a\,a''' - 3a''^2), \qquad M_1 = -\omega'' a', \qquad M_2 = 3\omega'^2,$$

$$(23) \qquad a'^2 x^2(x'^2 + y'^2) = P_0 x^4 + P_1 x^2 + P_2,$$

où

$$P_0 = a'^2(a'^2 - aa'') + \frac{a''^2}{4}(1 + a^2),$$

$$P_1 = [2aa'^2 - a''(1 + a^2)]\omega', \qquad P_2 = (1 + a^2)\omega'^2.$$

En différentiant les équations (22) et (23), nous aurons

$$(24) \qquad a'^2 x^4(x'y''' - x'''y') = N_0 x^6 + N_1 x^4 + N_2 x^2 + N_3,$$

où

$$N_0 = a'M_0' - 2a''M_0, \qquad N_2 = a'M_2',$$

$$N_1 = a'M_1' - a''M_1 + 2\omega'M_0, \qquad N_3 = -2\omega'M_2.$$

Enfin

$$2a'^3 x^4(x'x'' + y'y'') = R_0 x^6 + R_1 x^4 + R_2 x^2 + R_3,$$

où

$$R_0 = a'P_0' - 3a''P_0, \qquad R_2 = a'P_2' - a''P_2,$$

$$R_1 = a'P_1' - 2a''P_1 + 2\omega'P_0, \qquad R_3 = -2\omega'P_2.$$

En désignant x^2 par z, nous aurons l'équation sous la forme

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &3(R_0 z^3 + R_1 z^2 + R_2 z + R_3)(M_0 z^2 + M_1 z + M_2) \\ &\quad - 2(N_0 z^3 + N_1 z^2 + N_2 z + N_3)(P_0 z^2 + P_1 z + P_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

En substituant $z = 0$, on aura

$$3R_3 M_2 - 2N_3 P_2 = -6\omega'^5(1 + a^2) = 0;$$

d'où l'on a

$$w' = 0$$

et

$$M_1 = M_2 = P_1 = P_2 = 0,$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = R_1 = R_2 = R_3 = 0.$$

L'équation (25) se transforme en la suivante :

$$3R_0M_0 - 2N_0P_0 = 0.$$

En substituant les expressions de R_0 et N_0, on a

$$(26) \qquad 3(a'P' - 3a''P)M - 2P(a'M' - 2a''M) = 0,$$

où

$$M = 4M_0 = 2a'a''' - 3a''^2,$$
$$P = 4P_0 = a''^2 + (aa'' - 2a'^2)^2.$$

L'équation (26), qui sert à déterminer la fonction a, est du quatrième ordre. Malgré la complexité apparente de cette équation, son intégration est facile. En effet, l'équation (26) peut être mise sous la forme

$$a'(3P'M - 2PM') = 5a''MP.$$

Il est évident, d'après les conditions du problème, que les fonctions a, P ne peuvent s'annuler.

Le cas $M = 0$ donne les projections avec les parallèles rectilignes. En faisant tous les calculs, qui ne sont pas difficiles, il est aisé de se convaincre que, dans ce cas, les parallèles sont représentés par des droites parallèles entre elles.

En revenant au cas général, on a

$$\frac{3P'}{P} - \frac{2M'}{M} = \frac{5a''}{a'}.$$

En intégrant, on obtient

$$M = c\frac{P^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{5}{2}}},$$

c étant une constante.

En désignant $a'' = \xi$, $aa'' - 2a'^2 = \eta$, on aura

$$P = \xi^2 + \eta^2, \qquad M = \frac{\xi^2}{a'}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)',$$

d'où, en posant $\frac{\eta}{\xi} = \rho$, nous aurons

$$\frac{\xi^2}{a'}\rho' = \frac{\xi^3(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{5}{2}}}c,$$

d'où

$$\frac{\rho'}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\xi c}{a'^{\frac{3}{2}}} = c\frac{a''}{a'^{\frac{3}{2}}}.$$

En désignant

$$\frac{1}{\sqrt{a'}} = p, \qquad c_1 = -2c,$$

on aura

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = c_1 p + c_2,$$

c_2 étant une nouvelle constante arbitraire.

Ensuite, nous aurons, en posant $c_2 = -\alpha c_1$, $c_1 = \frac{1}{\nu}$,

$$(27) \qquad \rho = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}}.$$

En posant

$$\frac{a'}{a^2} = q, \qquad q' = \frac{aa'' - 2a'^2}{a^3} = \frac{\eta}{a^3}, \qquad \eta = q'a^3,$$

nous aurons

$$\frac{q'a^3}{\xi} = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}};$$

mais

$$\xi = a'', \qquad p^2 = \frac{1}{a'},$$

d'où l'on a

$$2pp' = -\frac{a''}{a'^2}, \qquad \xi = -2pp'a'^2.$$

En substituant dans l'équation (27), nous aurons

$$\frac{q' a^3}{-2pp' a'^2} = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}},$$

où

$$\frac{(p-\alpha)p'}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}} = -\frac{1}{2}\frac{q' a^3}{a'^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{q'}{\left(\frac{a'}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{q'}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant, on a

$$\frac{1}{\sqrt{q}} = \beta - \sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}.$$

Mais $a'p^2 = 1$; par conséquent $1 = p^2 q a^2$, d'où $\frac{1}{\sqrt{p}} = pa$, nous obtenons le système suivant :

$$(28)\qquad \begin{cases} (ap-\beta)^2 + (p-\alpha)^2 = \nu^2, \\ a'p^2 = 1. \end{cases}$$

En éliminant p du système (28), nous aurons pour a l'expression en quadratures.

En effet, la première des équations (28) donne

$$p^2 = 2\left(\frac{a\beta+\alpha}{a^2+1}\right)^2 - \frac{\beta^2+\alpha^2-\nu^2}{a^2+1} + 2\frac{a\beta+\alpha}{(a^2+1)^2}\Delta,$$

où

$$\Delta = \sqrt{a^2(\nu^2-\alpha^2)+2a\beta\alpha+\nu^2-\beta^2}.$$

D'où il vient

$$(29)\qquad \begin{cases} v+\gamma = 2\int\left[\frac{a\beta+\alpha}{a^2+1}\right]^2 da + (\nu^2-\alpha^2-\beta^2)\,\text{arc tang}\,a \\ \qquad\qquad + 2\int\frac{(a\beta+\alpha)\Delta}{(a^2+1)^2}\,da, \end{cases}$$

où γ est une dernière (quatrième) constante arbitraire.

Les quadratures s'expriment, comme on voit, par des logarithmes.

Pour obtenir la relation définitive entre a et v de la façon la plus simple, introduisons une nouvelle variable ω.

En effet, en ajoutant au système (28) l'équation

$$(30) \qquad p = \alpha + \nu \cos\omega,$$

on aura

$$(31) \qquad ap = \beta + \nu \sin\omega.$$

Ainsi la fonction cherchée a s'exprimera d'une façon très simple au moyen de ω :

$$(32) \qquad a = \frac{\beta + \nu \sin\omega}{\alpha + \nu \cos\omega}.$$

Il ne reste qu'à déterminer ω en fonction de v. Pour cela, différentions les équations (30), (31) :

$$(33) \qquad \begin{cases} p' = -\nu \sin\omega\, \omega', \\ a'p + ap' = \nu \cos\omega\, \omega'. \end{cases}$$

En multipliant l'équation (33) par p et tenant compte de l'équation $a'p^2 = 1$, nous aurons

$$1 = p\nu \cos\omega\, \omega' - app',$$

et au moyen des équations (30), (31), on aura

$$1 = \nu[\cos\omega(\alpha + \nu\cos\omega) + \sin\omega(\beta + \nu\sin\omega)]\omega',$$

d'où il vient

$$(34) \qquad v + \gamma = \nu(\alpha \sin\omega - \beta\cos\omega + \nu\omega).$$

Nous parvenons à l'équation (29) en éliminant ω entre (32), (34). *Nous obtenons donc les projections dans lesquelles les centres des parallèles se trouvent sur une droite passant par l'origine des coordonnées.*

Ajoutons maintenant deux mots pour le cas des méridiens représentés par les droites parallèles entre elles.

Soient les méridiens parallèles à l'axe des x, alors on a

$$y = a,$$

où a est une fonction de v, de sorte que $y'_v = a'$, $y_u = 0$.

En intégrant l'équation fondamentale

$$x'_u y'_v - x'_v y'_u = 1,$$

nous aurons

(35) $$a'x = u + w.$$

Si les parallèles sont des droites, on aura

(36) $$x'y'' - x''y' = x'a'' - x''a' = 0.$$

En différentiant l'équation (35) par rapport à v, on a

(37) $$a''x + a'x' = w',$$

(38) $$a'''x + 2a''x' + a'x'' = w''.$$

En éliminant x', x'' entre les équations (36), (37), (38), on aura définitivement

$$x(a'a''' - 3a''^2) + 3a''w' - w''a' = 0,$$

d'où il vient

(39) $$a'a''' - 3a''^2 = 0,$$

(40) $$3a''w' - w''a' = 0.$$

Il faut considérer deux cas : $a'' = 0$, a'' différent de zéro. Si $a'' = 0$, on aura $w'' = 0$ et les projections cherchées auront les parallèles, parallèles entre eux.

Dans le cas a'' différent de zéro, on obtient la fonction a de l'équation (39) par une simple intégration. On aura la fonction w par l'équation (40). De cette façon, on obtient les projections dans lesquelles les parallèles se croisent en un point. Ces projections sont déjà trouvées, car on peut changer de rôles les méridiens et les parallèles.

Pour achever la solution de notre problème de trouver toutes les projections rectilignes ou mixtes, il ne reste qu'à *trouver les projections qui, ayant les méridiens parallèles entre eux, donnent pour parallèles des cercles.*

Traitons cette dernière question d'une autre façon en appliquant la méthode par laquelle nous trouverons plus tard les projections circulaires.

Soit l'équation des parallèles

$$(41) \qquad y = b + \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}$$

où a, b, ρ sont les fonctions de u et x la fonction de v seule. Si nous supposons que les méridiens sont représentés par des droites, parallèles à l'axe de y, alors en intégrant l'équation (1), on aura

$$\int y'_u \, dx = U - v,$$

où U est une fonction de u, introduite par l'intégration, y'_u est une dérivée partielle dans la supposition de x constante, c'est-à-dire

$$y'_u = b' + \frac{\rho\rho' + (x-a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}}.$$

En substituant, on aura

$$b'x + \int \frac{\rho\rho' + (x-a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}} \, dx = U - v.$$

En différentiant par rapport à u, on aura

$$b''x - a''\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} - a' \frac{\rho\rho' + (\rho - a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}}$$
$$+ (\rho\rho')' \arcsin \frac{x-a}{\rho} + \rho\rho' \frac{\left(\frac{x-a}{\rho}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{\rho}\right)^2}} = U''.$$

Il faut évidemment poser $(\rho\rho')' = 0$, car autrement on aurait

arc sin $\frac{x-a}{\rho}$ exprimée algébriquement en fonction de x. On a, par conséquent,

$$\rho\rho'' + \rho'^2 = 0.$$

Nous aurons

$$b''x - U' - a''\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} = \frac{2a'\rho\rho' + (x-a)(a'^2 + \rho'^2)}{\sqrt{\rho^2 + (x-a)^2}},$$

En supprimant les radicaux on a

$$(b''x - U')^2[\rho^2 - (x-a)^2]$$
$$= \{a''[\rho^2 - (x-a)^2] + 2a'\rho\rho' + (x-a)(\rho'^2 + a'^2)\}^2.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^4, nous aurons

$$a''^2 + b''^2 = 0,$$

d'où il vient

$$a'' = 0, \qquad b'' = 0.$$

L'équation se simplifie

$$U'^2[\rho^2 - (x-a)^2] = [2a'\rho\rho' + (x-a)(\rho'^2 + a'^2)]^2.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^2, nous aurons

$$U'^2 + (\rho'^2 + a'^2)^2 = 0,$$

d'où l'on a

$$U' = 0, \qquad \rho' = 0, \qquad a' = 0.$$

Ainsi nous obtenons les projections *dont les parallèles sont des cercles de rayon constant, les centres de ces cercles se trouvant sur une droite parallèle à l'axe de y*.

En abordant le problème des projections circulaires, qui avait présenté de considérables difficultés, j'exposerai ma solution avec certains détails, qui, quoique n'étant pas nécessaires pour la démonstration, sont néanmoins utiles pour mieux comprendre la question. J'ai surtout en vue le lecteur qui voudrait généraliser mes recherches

pour les cas des méridiens et des parallèles représentés par des coniques.

Soient, en effet, les méridiens circulaires sur la carte et soient leurs équations,

$$(42)\qquad \begin{cases} x = a + \rho\cos\varphi, \\ y = b + \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

où a, b, ρ sont certaines fonctions de v et φ la fonction de u et de v.

Pour satisfaire à l'équation (1) il faut différentier les équations (42); nous obtiendrons

$$\rho[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho']\varphi'_u = 1.$$

En intégrant par rapport à u, nous aurons

$$(43)\qquad \rho a'\sin\varphi - \rho b'\cos\varphi + \rho\rho'\varphi = u + \omega.$$

En désignant, dans ce qui suit, par x', y', x'', y'', ..., φ', φ'', ... les dérivées prises par rapport à v, nous formerons l'équation différentielle des parallèles

$$3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') = 0.$$

Introduisant les notations suivantes :

$$k = \rho\rho',$$

$$\begin{aligned} A_1 &= a'\cos\varphi + b'\sin\varphi, & B_1 &= a'\sin\varphi - b'\cos\varphi, \\ A_2 &= a''\cos\varphi + b''\sin\varphi, & B_2 &= a''\sin\varphi - b''\cos\varphi, \\ A_3 &= a'''\cos\varphi + b'''\sin\varphi, & B_3 &= a'''\sin\varphi - b'''\cos\varphi, \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Après les simples calculs, nous aurons

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' = a'b'' - b'a'' &+ \rho''B_1 - \rho'B_2 \\ &+ \varphi'[2\rho'A_1 - \rho A_2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''] + \varphi'^2[-\rho B_1] \\ &+ \varphi'^3\rho^2 + \varphi''[\rho A_1 + k], \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho'A_1 - 2\rho\varphi'B_1 + \rho^2\varphi'^2,$$

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' = a'a'' + b'b'' + \rho'\rho'' + \rho' A_2 + \rho'' A_1 \\ + \varphi'[-2\rho' B_1 - \rho B_2] + \varphi'^2[-\rho A_1 + k] \\ + \varphi''[-\rho B_1] + \varphi'\varphi''\rho^2, \end{aligned}$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} x'y''' - y'x''' = a'b''' - b'a''' + \rho''' B_1 - \rho' B_3 \\ + \varphi'[3\rho'' A_1 - \rho A_3 + 3\rho'\rho'' - \rho\rho'''] \\ + \varphi'^2[-3\rho' B_1] + \varphi'^3[-\rho A_1 + 2k] \\ + \varphi'' 3\rho'[A_1 + \rho'] + \varphi''\varphi'^2 3\rho^2 + \varphi''\varphi'[-3\rho B_1] \\ + \varphi'''[\rho A_1 + k]. \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, l'équation (43) peut être écrite ainsi

$$(45) \qquad B_1\rho + k\varphi = u + \varpi.$$

En différentiant trois fois cette équation, on aura

$$(46) \qquad \rho' B_1 + \rho B_2 - \varpi' + k'\varphi + \varphi'[\rho A_1 + k] = 0,$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} -\varpi'' + \rho'' B_1 + 2\rho' B_2 + \rho B_3 + k''\varphi \\ + \varphi' 2[\rho' A_1 + \rho A_2 + k'] \\ + \varphi'^2[-\rho B_1] + \varphi''[\rho A_1 + k] = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} -\varpi''' + \rho''' B_1 + 3\rho'' B_2 + 3\rho' B_3 + \rho B_4 + k'''\varphi \\ + \varphi' 3[\rho'' A_1 + 2\rho' A_2 + \rho A_3 + k''] \\ + \varphi'^2 3[-\rho' B_1 - \rho B_2] + \varphi'^3[-\rho A_1] \\ + \varphi'' 3[\rho' A_1 + \rho A_2 + k'] \\ + \varphi'\varphi'' 3[-\rho B_1] + \varphi'''[\rho A_1 + k] = 0. \end{aligned} \right.$$

En soustrayant l'équation (43) de (44), nous aurons

$$\begin{aligned} x'y''' - y'x''' = a'b''' - b'a''' + \varpi''' - 3\rho'' B_2 - 4\rho' B_3 - \rho B_4 - k'''\varphi \\ + \varphi'[-6\rho' A_2 - 4\rho A_3 - 6\rho'\rho'' - 4\rho\rho'''] + \varphi'^2[3\rho B_2] \\ + \varphi'^3 2k + \varphi''[-3\rho A_2 - 3\rho\rho''] + \varphi'^2\varphi'' 3\rho^2. \end{aligned}$$

Éliminons de l'expression $x'y''' - x'''y'$ la dérivée φ'' au moyen de l'équation (47).

En effet, en multipliant par $(A_1 + \rho_1')$, nous aurons

$$\begin{aligned}&(A_1 + \rho_1')(x'y''' - x'''y') \\ &\quad = (A_1 + \rho_1')H + 3[-\varphi_1''(\rho_1 A_1 + k)](A_2 + \rho_1'' - \rho_1\varphi_1'^2),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}H = {}& a'b''' - a'''b' + \omega''' - 3\rho_1''B_2 - 4\rho_1'B_3 - \rho_1 B_4 - k'''\varphi_1 \\ & + \varphi_1'[-6\rho_1(A_2 + \rho_1'') - 4\rho_1(A_3 + \rho_1''')] + \varphi_1'^2[3\rho_1 B_2] + \varphi_1'^3 2k.\end{aligned}$$

L'équation (47) donne

$$\begin{aligned}&(A_1 + \rho_1')(x'y''' - x'''y') = (A_1 + \rho_1')H \\ &\quad + 3(A_2 + \rho_1'' - \rho_1\varphi_1'^2)\left\{\begin{array}{l} -\omega'' + \rho_1''B_1 + 2\rho_1'B_2 + \rho_1 B_3 + k''\varphi_1 \\ + \varphi_1' 2(\rho_1'A_1 + \rho_1 A_2 + k') - \varphi_1'^2\rho_1 B_1 \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

On a

$$(A_1 + \rho_1')(x'y''' - x'''y') = P_0 + P_1\varphi_1' + P_2\varphi_1'^2 + P_3\varphi_1'^3 + P_4\varphi_1'^4,$$

où

$$\begin{aligned}P_0 &= (A_1 + \rho_1')[a'b''' - a'''b' + \omega''' - 3\rho_1''B_2 - 4\rho_1'B_3 - \rho_1 B_4 - k'''\varphi_1] \\ &\quad + 3(A_2 + \rho_1'')[-\omega'' + \rho_1''B_1 + 2\rho_1'B_2 + \rho_1 B_3 + k''\varphi_1], \\ P_1 &= 6\rho_1(A_2 + \rho_1'')^2 - 4\rho_1(A_1 + \rho_1')(A_3 + \rho_1'''), \\ P_2 &= 3\rho_1[\omega'' + A_1 B_2 - A_2 B_1 - k''\varphi_1 - 2\rho_1''B_1 - \rho_1'B_2 - \rho_1 B_3], \\ P_3 &= \rho_1[-4\rho_1'(A_1 + \rho_1') - 6\rho_1(A_2 + \rho_1'')], \\ P_4 &= 3\rho_1^2 B_1.\end{aligned}$$

En outre, on a :

$$x'y'' - y'x'' = N_0 + N_1\varphi_1' + N_2\varphi_1'^2 + N_3\varphi_1'^3,$$

où

$$\begin{aligned}N_0 &= a'b'' - a''b' + \omega'' - 3\rho_1'B_2 - \rho_1 B_3 - k''\varphi_1, \\ N_1 &= -3\rho_1(A_2 + \rho_1''), \\ N_2 &= 0, \\ N_3 &= \rho_1^2.\end{aligned}$$

On a aussi

$$x'^2 + y'^2 = L_0 + L_1 \rho_1' + L_2 \rho_1'^2,$$

où

$$\begin{aligned}
L_0 &= a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho_1' A_1,\\
L_1 &= -2\rho_1 B_1,\\
L_2 &= \quad \rho_1^2.
\end{aligned}$$

En différentiant et multipliant par $(A_1 + \rho_1')$, on aura

$$(A_1 + \rho_1')(x'x'' + y'y'') = M_0 + M_1 \rho_1' + M_2 \rho_1'^2 + M_3 \rho_1'^3,$$

où

$$\begin{aligned}
M_0 &= (A_1 + \rho_1')[a'a'' + b'b'' + \rho_1'\rho_1'' + \rho_1' A_2 + \rho_1'' A_1]\\
&\quad + B_1[-\alpha'' + \rho_1'' B_1 + 2\rho_1' B_2 + \rho_1 B_3 + k''\rho_1],\\
M_1 &= \alpha''\rho_1 + 2\rho_1 A_2 B_1 - \rho_1 A_1 B_2 + (k' - \rho_1'^2) B_1 - 3k B_2 - \rho_1^2 B_3 - k''\rho_1\rho_1,\\
M_2 &= -\rho_1[A_1^2 + B_1^2 - \rho_1'^2 + 2k' + 2\rho_1' A_1 + 2\rho_1 A_2],\\
M_3 &= \quad \rho_1^2 B_1.
\end{aligned}$$

En substituant les expressions obtenues dans l'équation différentielle des parallèles, on aura

$$\begin{aligned}
&3[N_0 + N_1 \rho_1' + N_2 \rho_1'^2 + N_3 \rho_1'^3][M_0 + M_1 \rho_1' + M_2 \rho_1'^2 + M_3 \rho_1'^3]\\
&-[L_0 + L_1 \rho_1' + L_2 \rho_1'^2][P_0 + P_1 \rho_1' + P_2 \rho_1'^2 + P_3 \rho_1'^3 + P_4 \rho_1'^4] = 0.
\end{aligned}$$

En ouvrant les parenthèses, on aura

$$(49) \quad \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 \rho_1' + \mathfrak{M}_2 \rho_1'^2 + \mathfrak{M}_3 \rho_1'^3 + \mathfrak{M}_4 \rho_1'^4 + \mathfrak{M}_5 \rho_1'^5 + \mathfrak{M}_6 \rho_1'^6 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_6 &= 3N_3 M_3 - L_2 P_4 = 3\rho_1^2 \rho_1^2 B_1 - \rho_1^2\, 3\rho_1^2 B_1 = 0,\\
\mathfrak{M}_5 &= 3N_3 M_2 + 3N_2 M_3 - L_2 P_3 - L_1 P_4\\
&= 3N_3 M_2 - L_2 P_3 - L_1 P_4 = \rho_1^3[3(B_1^2 - A_1^2) - 2A_1\rho_1' + \rho_1'^2].
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à éliminer de l'équation (49) φ' au moyen de l'équation (46); de cette manière on aura l'équation de la forme

$$f(\varphi, \sin\varphi, \cos\varphi) = 0,$$

où f est une fonction entière de φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, avec les coefficients dépendant seulement de v.

Voyons comment l'arc φ entre dans cette équation.

Les coefficients M_0, M_1, N_0, P_0, P_2 sont du premier degré par rapport au φ, par conséquent φ peut paraître au second degré seulement dans les coefficients $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, tandis que les coefficients $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ sont du premier degré.

Quant au coefficient $\mathfrak{M}_4$, il est indépendant de φ, car on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_4 &= 3N_1M_0 + 3N_3M_1 - L_0P_4 - L_1P_3 - L_2P_2 \\
&= 3\rho^2B_1[-3\rho(A_2+\rho'')] \\
&\quad + 3\rho^2[\alpha''\rho + 2\rho A_2B_1 - \rho A_1B_2 \\
&\qquad\qquad + (k' - \rho'^2)B_1 - 3kB_2 - \rho^2B_3 - k'\varphi\rho] \\
&\quad - 3\rho^2B_1[a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho A_1] \\
&\quad + 2\rho^2B_1[-4\rho'(A_1+\rho') - 6\rho(A_2+\rho'')] \\
&\quad - 3\rho^3[\alpha'' + A_1B_2 - A_2B_1 - k''\varphi - 2\rho''B_1 - \rho'B_2 - \rho B_3].
\end{aligned}$$

Nous voyons que, après la multiplication de l'équation par $(\rho A_1 + k)^5$, nous obtiendrons

$$(50)\qquad \mathfrak{M}_5 k'^5\varphi^5 + \varphi^4Q_1 + \varphi^3Q_2 + \varphi^2Q_3 + \varphi Q_4 + Q_5 = 0.$$

Les coefficients

$$Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3,\quad Q_4,\quad Q_5$$

seront les fonctions entières des $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, avec les coefficients dépendant uniquement de v.

Il est évident qu'on ne peut satisfaire à l'équation (50) qu'en posant

$$\mathfrak{M}_5 k'^5 = 0,\qquad Q_1 = 0,\qquad Q_2 = 0,\qquad Q_3 = 0,\qquad Q_4 = 0,\qquad Q_5 = 0,$$

car autrement φ, dépendant nécessairement de u, s'exprimerait algébriquement par $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Considérons le cas $\mathfrak{M}_5 = 0$.

On obtient

$$3(B_1^2 - A_1^2) - 2A_1\rho' + \rho'^2 = 0$$

ou

$$3(a'^2 - b'^2)\sin^2\varphi - 12a'b'\sin\varphi\cos\varphi + 3(b'^2 - a'^2)\cos^2\varphi \\ - 2\rho'a'\cos\varphi - 2\rho'b'\sin\varphi + \rho'^2 = 0.$$

Il ne faut pas oublier que φ dépend de u et, par conséquent, il est impossible de satisfaire à cette équation autrement qu'en posant

$$a'^2 - b'^2 = 0, \qquad a'b' = 0, \qquad \rho'a' = 0, \qquad \rho'b' = 0, \qquad \rho' = 0,$$

d'où l'on a

$$a' = 0, \qquad b' = 0, \qquad \rho' = 0$$

et il n'existe point de projections.

Il reste le cas uniquement possible

$$k' = 0,$$

alors

$$\rho = \sqrt{2kv + l},$$

où k et l sont des nombres constants.

Ainsi nous avons démontré que les projections possibles ont lieu à la condition $k' = 0$; il ne reste qu'à les trouver.

Il faut à présent aborder la recherche des coordonnées a, b des centres des méridiens en fonction de v et de la fonction w introduite par intégration.

Introduisons dans nos calculs les quantités complexes, en posant

$$\left.\begin{aligned} a + bi &= c \\ a - bi &= \gamma \end{aligned}\right\} \qquad 2iw = \sigma,$$

$$e^{i\varphi} = z, \qquad e^{-i\varphi} = t,$$

de sorte que $zt = 1$.

Il est évident que nous nous rappellerons, dans tout ce qui suit, le résultat obtenu $k' = 0$.

On aura, après les calculs analogues aux précédents,

$$\begin{aligned}
2i(x'y''' - x'''y') &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\varphi'_1 i + \mathcal{A}_2\varphi'^2_1 + \mathcal{A}_3\varphi'^3 i \\
&\quad + i\varphi''_1[\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_2\varphi'^2_1], \\
x'^2 + y'^2 &= \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 i\varphi'_1 + \mathcal{C}_2\varphi'^2_1, \\
2i(x'y'' - y'x'') &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 i\varphi'_1 + \mathcal{D}_3 i\varphi'^3_1, \\
2(x'x'' + y'y'') &= \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1\varphi'_1 i + \mathcal{E}_2\varphi'^2_1 \\
&\quad + \varphi''_1 i[\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1\varphi'_1],
\end{aligned}$$

où les notations expriment

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \sigma''' + c'''\gamma' - c'\gamma''' - z[3\rho''_1\gamma'' + 4\rho'_1\gamma''' + \rho_1\gamma^{\text{iv}}] \\
&\quad + t[3\rho''_1 c'' + 4\rho'_1 c''' + \rho_1 c^{\text{iv}}], \\
\mathcal{A}_1 &= 6\rho'_1\rho''_1 - 2\rho_1\rho'''_1 - z(6\rho'_1\gamma'' + 4\rho_1\gamma''') - t(6\rho'_1 c'' + 4\rho_1 c'''), \\
\mathcal{A}_2 &= 3\rho_1[z\gamma'' - tc''], \qquad \mathcal{A}_3 = 4k; \\
\mathcal{B}_0 &= 6\rho'^2_1 - 3\rho_1\gamma'' z - 3\rho_1 c'' t, \qquad \mathcal{C}_0 = \rho'^2_1 + c'\gamma' + z\rho'_1\gamma' + t\rho'_1 c', \\
\mathcal{B}_1 &= 0, \qquad \mathcal{C}_1 = \rho_1(z\gamma' - tc'), \\
\mathcal{B}_2 &= 6\rho^2_1, \qquad \mathcal{C}_2 = \rho^2_1; \\
\mathcal{D}_0 &= \sigma'' + c''\gamma' - \gamma''c' - z(3\rho'_1\gamma'' + \rho_1\gamma''') + t(3\rho'_1 c'' + \rho_1 c'''), \\
\mathcal{D}_1 &= -3\rho_1[z\gamma'' + tc'' + 2\rho''_1], \\
\mathcal{D}_3 &= \quad 2\rho^2_1, \\
\mathcal{E}_0 &= c''\gamma' + c'\gamma'' + 2\rho'_1\rho''_1 + z(\rho'_1\gamma')' + t(\rho'_1 c')', \\
\mathcal{E}_1 &= z(2\rho'_1\gamma' + \rho_1\gamma'') - t(2\rho'_1 c' + \rho_1 c''), \\
\mathcal{E}_2 &= 2k - z\rho_1\gamma' - t\rho_1 c', \\
\mathcal{F}_0 &= \rho_1(z\gamma' - tc'), \\
\mathcal{F}_1 &= -2\rho^2_1.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation différentielle des cercles et en ouvrant

les parenthèses, nous aurons

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} & M_0 + i\varphi' M_1 + \varphi'^2 M_2 + i\varphi'^3 M_3 + \varphi'^4 M_4 + i\varphi'^5 M_5 \\ & \qquad + i\varphi'' [N_0 + i\varphi' N_1 + \varphi'^2 N_2 + i\varphi'^3 N_3 + \varphi'^4 N_4] = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$M_0 = 3\mathcal{D}_0 \mathcal{C}_0 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_0,$$

$$M_1 = 3\mathcal{D}_1 \mathcal{C}_0 + 3\mathcal{D}_0 \mathcal{C}_1 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{A}_0 \mathcal{S}_1,$$

$$M_2 = 3\mathcal{D}_0 \mathcal{C}_2 - 3\mathcal{D}_1 \mathcal{C}_1 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_2 + 2\mathcal{S}_1 \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{A}_0,$$

$$M_3 = 3\mathcal{D}_1 \mathcal{C}_2 + 3\mathcal{D}_3 \mathcal{C}_0 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{S}_1 \mathcal{A}_2 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{A}_1,$$

$$M_4 = -3\mathcal{D}_3 \mathcal{C}_1 + 2\mathcal{S}_1 \mathcal{A}_3 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{A}_2,$$

$$M_5 = \quad 3\mathcal{D}_3 \mathcal{C}_2 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{A}_3;$$

$$N_0 = \quad 3\mathcal{D}_0 \mathcal{F}_0 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{B}_0,$$

$$N_1 = \quad 3\mathcal{D}_0 \mathcal{F}_1 + 3\mathcal{D}_1 \mathcal{F}_0 - 2\mathcal{S}_1 \mathcal{B}_0,$$

$$N_2 = -3\mathcal{D}_1 \mathcal{F}_1 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{B}_2 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{B}_0,$$

$$N_3 = \quad 3\mathcal{D}_3 \mathcal{F}_0 - 2\mathcal{S}_1 \mathcal{B}_2,$$

$$N_4 = -3\mathcal{D}_3 \mathcal{F}_1 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{B}_2.$$

D'abord nous voyons que $N_4 = 0$, car

$$-3\mathcal{D}_3 \mathcal{F}_1 - 2\mathcal{S}_2 \mathcal{B}_2 = -6\rho^2(-2\rho^2) - 2\rho^2 6\rho^2 = 0.$$

Nous avons aussi

$$i\varphi'' \Lambda_0 = K_0 + i\varphi' K_1 + \varphi'^2 K_2,$$

où

$$\Lambda_0 = \mathfrak{a} z + A + \alpha t,$$

$$\mathfrak{a} = \rho\gamma', \qquad A = 2k, \qquad \alpha = \rho c',$$

$$K_0 = \sigma'' - (\rho\gamma')'' z + (\rho c')'' t,$$

$$K_1 = -2[z(\rho\gamma')' + t(\rho c')'],$$

$$K_2 = \quad \rho[z\gamma' - tc'].$$

En multipliant l'équation (51) par Λ_0, nous aurons

$$\begin{aligned} & \Lambda_0 [M_0 + i\varphi' M_1 + \varphi'^2 M_2 + i\varphi'^3 M_3 + \varphi'^4 M_4 + i\varphi'^5 M_5] \\ & \quad + (K_0 + K_1 i\varphi' + K_2 \varphi'^2)[N_0 + N_1 i\varphi' + N_2 \varphi'^2 + N_3 i\varphi'^3] = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons définitivement

$$(52)\qquad \mathcal{M}_0 + i\varphi'\mathcal{M}_1 + \varphi'^2\mathcal{M}_2 + i\varphi'^3\mathcal{M}_3 + \varphi'^4\mathcal{M}_4 + i\varphi'^5\mathcal{M}_5 = 0$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= A_0 M_0 + K_0 N_0,\\
\mathcal{M}_1 &= A_0 M_1 + K_0 N_1 + K_1 N_0,\\
\mathcal{M}_2 &= A_0 M_2 + K_0 N_2 - K_1 N_1 + K_2 N_0,\\
\mathcal{M}_3 &= A_0 M_3 + K_0 N_3 + K_1 N_2 + K_2 N_1,\\
\mathcal{M}_4 &= A_0 M_4 \qquad\qquad - K_1 N_3 + K_2 N_2,\\
\mathcal{M}_5 &= A_0 M_5 \qquad\qquad\qquad\qquad + K_2 N_3.
\end{aligned}$$

Pour faire disparaître dans l'équation (52) la dérivée φ', multiplions-la par A_0^5 et prenons en vue l'équation

$$i\varphi' A_0 = B_0,$$

où

$$B_0 = \mathfrak{b} z + B + \beta t,$$

où

$$\mathfrak{b} = -(\rho\gamma')', \qquad B = \sigma', \qquad \beta = (\rho c')'.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_0 A_0^5 + \mathcal{M}_1 A_0^4 (i\varphi' A_0) - \mathcal{M}_2 A_0^3 (i\varphi' A_0)^2\\
&\qquad - \mathcal{M}_3 A_0^2 (i\varphi' A_0)^3 + \mathcal{M}_4 A_0 (i\varphi' A_0)^4 + \mathcal{M}_5 (i\varphi' A_0)^5 = 0,
\end{aligned}$$

d'où il vient

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{M}_0 A_0^5 + \mathcal{M}_1 B_0 A_0^4 - \mathcal{M}_2 B_0^2 A_0^3\\
&\qquad - \mathcal{M}_3 B_0^3 A_0^2 + \mathcal{M}_4 B_0^4 A_0 + \mathcal{M}_5 B_0^5 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les degrés des coefficients par rapport aux z et t ne peuvent surpasser les nombres indiqués dans la Table suivante :

N_3....	1	M_5....	1	K_2....	1	A_0....	1	$\mathcal{M}_5$....	2
N_2....	1	M_4....	1	K_1....	1	B_0....	1	$\mathcal{M}_4$....	2
N_1....	2	M_3....	2	K_0....	1			$\mathcal{M}_3$....	3
N_0....	2	M_2....	2					$\mathcal{M}_2$....	3
		M_1....	2					$\mathcal{M}_1$....	3
		M_0....	2					$\mathcal{M}_0$....	3

Il n'est pas difficile de se convaincre que dans le coefficient $\mathfrak{M}_3$ disparaissent les membres du troisième degré z^3, t^3.

Ainsi l'on voit que l'équation dont dépend la solution de notre problème reçoit définitivement la forme suivante :

$$(54)\qquad O_0 z^8 + O_1 z^7 + \ldots + O_7 z + \mathcal{O} + \Omega_0 t^8 + \Omega_1 t^7 + \ldots + \Omega_7 t = 0.$$

Les coefficients $\mathcal{O}$, O_i, Ω_i dépendent des fonctions γ, c, σ et de leurs dérivées jusqu'au quatrième ordre.

En nous souvenant que z et t doivent dépendre de u qui n'entre dans les fonctions γ, σ, c, il résulte que, pour satisfaire à l'équation (54) d'une façon la plus générale, il faut poser

$$(55)\qquad \begin{cases} O_0 = 0, \quad O_1 = 0, \quad O_2 = 0, \quad \ldots, \quad O_7 = 0, \quad \mathcal{O} = 0 \\ \Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_7 = 0. \end{cases}$$

Il reste pour résoudre la question de trouver les expressions les plus générales des fonctions a, b, w satisfaisant au système (55).

Formons l'équation $O_0 = 0$; il pourra composer le coefficient de z^8.

En ayant compte de la Table précédente, nous voyons que le degré z^8 résultera des membres

$$\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 A_0^4 B_0 - \mathfrak{M}_2 A_0^3 B_0^2.$$

En désignant les coefficients de z^3 dans les expressions $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ par

$$\mathfrak{M}_0^0, \quad \mathfrak{M}_1^0, \quad \mathfrak{M}_2^0,$$

nous verrons que notre équation sera

$$\alpha^3(\alpha^2 \mathfrak{M}_0^0 + \alpha\beta \mathfrak{M}_1^0 - \beta^2 \mathfrak{M}_2^0) = 0,$$

où

$$\alpha = \rho\gamma', \qquad \beta = -(\rho\gamma')'.$$

Calculons les coefficients $\mathfrak{M}_0^0$, $\mathfrak{M}_1^0$, $\mathfrak{M}_2^0$:

$$\begin{aligned} M_0 = 3\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0 - 2\mathfrak{C}_0\mathfrak{A}_0 &= 3[-(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')z + \ldots][(\rho'\gamma')'z + \ldots] \\ &\quad - 2(\rho'\gamma' z + \ldots)[-(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{\text{IV}})z + \ldots] \\ &= z^2[2\rho'\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + 5\gamma^{\text{IV}}) - 3(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')(\rho'\gamma'' + \rho''\gamma')] + \ldots \end{aligned}$$

$$N_0 = 3\mathfrak{B}_0\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0 = z^2[2.3\rho\gamma''\rho'\gamma' - 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')] + \ldots$$

Ainsi nous avons

$$\mathfrak{M}_0 = A_0 M_0 + K_0 N_0 = \mathfrak{M}_0^0 z^3 + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{M}_0^0 = \rho\gamma'(2k\gamma'\gamma^{\text{IV}} - 3\rho'^2\gamma''^2 + 3\rho^2\gamma'''^2 + 6k\gamma''\gamma''' + 8\rho^2\gamma'\gamma').$$

Calcul de $\mathfrak{M}_1^0$:

$$\begin{aligned} M_1 &= 3\Theta_1 \mathcal{E}_0 + 3\Theta_0 \mathcal{E}_1 - 2\mathcal{S}_1 \mathcal{A}_0 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_1 \\ &= z^2[2\rho\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{\text{IV}}) + 2\rho'\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') \\ &\qquad - 9\rho\gamma''(\rho'\gamma')' - 3(3\rho\gamma'' + \rho\gamma''')(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'')] + \ldots \\ \mathfrak{M}_1 &= A_0 M_1 + K_1 N_0 + K_0 N_1 = \mathfrak{M}_1^0 z^3 + \ldots, \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{M}_1^0 = \rho\gamma'(2\rho^2\gamma'\gamma^{\text{IV}} + 16k\gamma'\gamma''' - 6k\gamma''^2 + 6\rho^2\gamma''\gamma'').$$

Enfin

$$\begin{aligned} M_2 &= -3\Theta_1 \mathcal{E}_1 + 3\Theta_0 \mathcal{E}_2 - 2\mathcal{A}_0 \mathcal{S}_2 + 2\mathcal{S}_1 \mathcal{A}_1 - 2\mathcal{S}_0 \mathcal{A}_2 \\ &= z^2[9\rho\gamma''(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') + 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') \\ &\qquad - 2\rho\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - 6\rho\rho'\gamma'\gamma''] + \ldots, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$\mathfrak{M}_2 = A_0 M_2 + K_2 N_0 - K_1 N_1 + K_0 N_2 = \mathfrak{M}_2^0 z^3 + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{M}_2^0 = \rho^3\gamma'(3\gamma''^2 - 8\gamma'\gamma''').$$

On pourrait satisfaire à l'équation $O_0 = 0$ de deux manières différentes :

$$(56) \qquad \alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 \mathfrak{M}_0^0 + \alpha\beta \mathfrak{M}_1^0 - \beta^2 \mathfrak{M}_2^0 = 0.$$

Le cas $\alpha = 0$ donne

$$\gamma = \text{const.}$$

On obtient des projections avec les méridiens concentriques.

Dans le cas général, on aura l'équation (56), qui, après toutes les

réductions, se transforme en

$$-2\gamma'^2\gamma''\gamma^{\text{iv}} - 3\gamma''^4 + 3\gamma'^2\gamma'''^2 + 2\gamma'\gamma''^2\gamma''' = 0,$$

où, en posant $\gamma' = y$, on aura

$$(57) \qquad -2y^2y'y''' - 3y'^4 + 3y^2y''^2 + 2yy'^2y'' = 0.$$

Il faut considérer des cas à part

$$y = 0, \qquad y' = 0,$$

car autrement l'équation (57), par la substitution

$$u = \frac{y'}{y},$$

se transforme en la suivante :

$$(58) \qquad u'^2 - 2uu' = 0.$$

On voit que, outre la solution générale donnée par l'équation (58), il faut examiner à part les solutions singulières

$$y = 0, \qquad y' = 0, \qquad u' = 0.$$

En prenant la solution générale de l'équation $O_8 = 0$, on voit qu'en même temps sera satisfaite l'équation $\Omega_8 = 0$; il restera à satisfaire par le choix convenable des constantes arbitraires les quinze autres équations du système (55).

Si nous faisions cet examen, nous verrions que la solution générale mène à la contradiction, et que les projections sont données par les solutions singulières. Cet examen conduirait à des calculs trop pénibles qui exagéreraient les difficultés du problème.

Pour arriver à notre but d'une façon la plus directe, examinons d'abord le cas des projections concentriques, c'est-à-dire le cas

$$y = \gamma' = 0.$$

Alors on aura

$$\mathcal{A}_0 = \sigma''', \qquad \mathcal{A}_1 = 12\rho'\rho'', \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{A}_3 = 4k.$$

$$\mathcal{B}_0 = 6\rho'^2, \qquad \mathcal{B}_2 = 6\rho^2.$$

$$\mathcal{C}_0 = \rho'^2, \qquad \mathcal{C}_1 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 = \rho^2.$$

$$\mathcal{D}_0 = \sigma'', \qquad \mathcal{D}_1 = -6\rho\rho'', \qquad \mathcal{D}_3 = 2\rho^2.$$

$$\mathcal{E}_0 = 2\rho'\rho'', \qquad \mathcal{E}_1 = 0, \qquad \mathcal{E}_2 = 2k.$$

$$\mathcal{F}_0 = 0, \qquad \mathcal{F}_1 = -2\rho^2.$$

$$\mathrm{A}_0 = 2k, \qquad \mathrm{B}_0 = \sigma', \qquad \mathrm{K}_0 = \sigma'', \qquad \mathrm{K}_1 = 0, \qquad \mathrm{K}_2 = 0.$$

L'équation a la forme

$$\begin{aligned}2^5 k^5(24\rho\rho'^2\rho''\sigma'' - 4k\rho'^2\sigma''') + 2^4k^4\sigma'(-24\rho^2\rho'^2\rho''^2 - 6\rho^2\sigma''^2)\\ - 2^3k^3\sigma'^2(24k^2\sigma'' - 4k\rho^2\sigma''') + 2^2k^2\sigma'^3 80\rho^2\rho'\rho''k + \sigma'^5 8\rho^2k^2 = 0.\end{aligned}$$

En introduisant au lieu de σ la quantité réelle w au moyen des formules

$$\sigma' = 2iw', \qquad \sigma'' = 2iw'', \qquad \sigma''' = 2iw''',$$

on aura

$$\begin{aligned}k^3(6\rho\rho'^2\rho''w'' - k\rho'^2w''') + k^2w'(-3\rho^2\rho'^2\rho''^2 + 3\rho^2w''^2)\\ + kw'^2(6k^2w'' - k\rho^2w''') - 10k\rho^2\rho'\rho''w'^3 + \rho^2w'^5 = 0.\end{aligned}$$

En ouvrant les parenthèses

$$\begin{aligned}w'''\left(\frac{k^6}{\rho^2} + k^2\rho^2w'^2\right) - 3\rho^2k^2w'w''^2 + 6w''\left(\frac{k^7}{\rho^4} - k^3w'^2\right)\\ + 3\frac{k^8}{\rho^6}w' - 10\frac{k^4}{\rho^2}w'^3 - \rho^2w'^5 = 0\ (^1).\end{aligned}$$

Prenons ρ pour la variable indépendante, en la désignant par x, et pour sa fonction y prenons la quantité

$$\frac{1}{k}\frac{dw}{d\rho}.$$

---

(1) Il faut se souvenir que $\rho' = \frac{k}{\rho}$, $\rho'' = -\frac{k^2}{\rho^3}$.

On aura

$$d\varpi = ky\,d\rho,$$

d'où

$$\varpi' = \frac{d\varpi}{dv} = ky\frac{d\rho}{dv} = k^2\frac{y}{x}.$$

$$\varpi'' = k^3\frac{xy' - y}{x^3}, \qquad \varpi''' = k^4\frac{x^2y'' - 3xy' + 3y}{x^5}.$$

Notre équation devient

$$xy''(1 + x^2y^2) - 3x^3yy'^2 + 3y'(1 - x^2y^2) - xy^3(4 + x^2y^2) = 0.$$

Introduisons la nouvelle variable u

$$(59) \qquad xy = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}};$$

on aura, après toutes les réductions,

$$x^2u'' + xu' - u = 0.$$

En intégrant, on aura

$$(60) \qquad u' + \frac{u}{x} = l_0,$$

où l_0 est une constante arbitraire.

En intégrant (60), on aura

$$u = \frac{c + l_0x^2}{2x}.$$

La formule (59) donne

$$y = \frac{\frac{u}{x}}{\sqrt{1 - u^2}};$$

au moyen de (60) on a

$$y = -\frac{u' - l_0}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Introduisons encore une nouvelle variable

$$(61) \qquad u - l_0x = q,$$

on aura

$$q = \frac{c - l_0 x^2}{2x},$$

$$1 - u^2 = 1 - l_0 c - q^2.$$

Désignons $1 - l_0 c = l_0^2 \Lambda_0^2$.

L'équation (61) donne $u' - l_0 = q'$, de sorte que

$$y = \frac{dw}{k d\rho} = -\frac{q'}{\sqrt{l_0^2 \Lambda^2 - q^2}};$$

mais $q\, d\rho = dq$, d'où

$$w = -k \int \frac{dq}{\sqrt{l_0^2 \Lambda^2 - q^2}} = k \arccos \frac{q}{l_0 \Lambda} + w_0;$$

w_0 est la troisième constante arbitraire.

En substituant la quantité q, on aura

$$w = w_0 + k \arccos \frac{\frac{1}{l_0^2} - \Lambda^2 - x^2}{2\Lambda x}.$$

La formule

$$w = w_0 + k \arccos \frac{\rho^2 + \Lambda^2 - R^2}{2\Lambda\rho}, \qquad \text{où} \qquad R = \frac{1}{l_0},$$

détermine complètement les projections. Nous obtenons

$$\varphi = \frac{u + w_0}{k} + \arccos \frac{\rho^2 + \Lambda^2 - R^2}{2\Lambda\rho}.$$

En substituant dans les équations fondamentales (42), nous aurons

$$x = a + \rho\left(\cos \frac{u + w_0}{k}\, \frac{\rho^2 + \Lambda^2 - R^2}{2\Lambda\rho} - \sin \frac{u + w_0}{k}\, \frac{\Delta}{2\Lambda\rho}\right),$$

$$y = b + \rho\left(\sin \frac{u + w_0}{k}\, \frac{\rho^2 + \Lambda^2 - R^2}{2\Lambda\rho} + \cos \frac{u + w_0}{k}\, \frac{\Delta}{2\Lambda\rho}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{4\Lambda^2\rho^2 - (\rho^2 + \Lambda^2 - R^2)^2} \\ &= \sqrt{(R + \rho + \Lambda)(R + \Lambda - \rho)(R + \rho - \Lambda)(\rho + \Lambda - R)}. \end{aligned}$$

Les équations définitives des projections seront

$$(62)\qquad x = a + \cos\frac{u+w_0}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} - \sin\frac{u+w_0}{k}\,\frac{\Delta}{2A},$$

$$(63)\qquad y = b + \sin\frac{u+w_0}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} + \cos\frac{u+w_0}{k}\,\frac{\Delta}{2A}.$$

Examinons la forme des méridiens et des parallèles.

Des formules (62), (63), on aura

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2=2kv+l;$$

les méridiens sont évidemment des cercles concentriques.

Pour avoir les parallèles, éliminons ρ.

En multipliant par $\cos\frac{u+w_0}{k}$ l'équation (62), et par $\sin\frac{u+w_0}{k}$ l'équation (63), on aura, après une addition,

$$2A(x-a)\cos\frac{u+w_0}{k}+2A(y-b)\sin\frac{u+w_0}{k}=\rho^2+A^2-R^2:$$

mais on a $(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$, d'où il vient

$$(x-a)^2+(y-b)^2-2A\cos\frac{u+w_0}{k}(x-a)$$
$$-2A\sin\frac{u+w_0}{k}(y-b)+A^2=R^2.$$

Nous aurons définitivement

$$\left(x-a-A\cos\frac{u+w_0}{k}\right)^2+\left(y-b-A\sin\frac{u+w_0}{k}\right)^2=R^2.$$

Ainsi nous voyons que les parallèles sont des cercles avec le rayon constant R. En désignant par ξ et η les coordonnées du centre d'une des parallèles, on aura

$$\xi=a+A\cos\frac{u+w_0}{k},\qquad \eta=b+A\sin\frac{u+w_0}{k},$$

d'où il vient

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=A^2.$$

Ce cercle représente le lieu géométrique des centres des parallèles.

En revenant au cas général, tâchons de simplifier autant que possible le problème, en nous souvenant du résultat fondamental, que le rayon des méridiens s'exprime par la formule

$$\sqrt{2kv + l}.$$

Nous voyons qu'à cause de la symétrie de l'équation (1) par rapport à u et à v le rayon des parallèles doit s'exprimer par la formule semblable

$$\sqrt{2Ku + L},$$

ou, en conservant nos notations, on aura

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2} = 2Ku + L,$$

K et L étant des constantes.

Quant à l'expression

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2},$$

nous voyons qu'elle doit être une fonction rationnelle des $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, que nous désignons par

$$R(\sin\varphi, \cos\varphi).$$

On aura

$$R(\sin\varphi, \cos\varphi) = 2Ku + L.$$

Au moyen de l'équation (43), nous aurons

$$2kK\varphi + 2K(a'\sin\varphi - b'\cos\varphi)\rho - 2Kw + L = R(\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Si R ne devient pas indéterminée ou infinie, ce qui aurait lieu quand $x'y'' - y'x'' = 0$, l'équation donnera

$$kK = 0,$$

d'où nous voyons qu'un des systèmes des lignes composant le réseau, les méridiens ou les parallèles doivent avoir le rayon constant. Cette remarque permet de simplifier considérablement le problème.

En effet, supposons que les méridiens sont des cercles avec le rayon constant. En prenant la longueur de ce rayon pour unité, nous aurons les équations des projections en forme

$$(64)\qquad \begin{cases} x = a + \cos\varphi, \\ y = b + \sin\varphi, \end{cases}$$

où a et b exprimées en v donnent les coordonnées d'un point de la courbe Σ, qui sera le lieu des centres des méridiens ; soit v l'angle que fait la tangente de cette courbe Σ avec l'axe des x. Introduisons en outre le rayon de courbure ρ de la courbe Σ ; nous aurons alors ou $\rho = \infty$, ou

$$a = \int \rho \cos v \, dv, \qquad b = \int \rho \sin v \, dv.$$

Il faudra évidemment satisfaire à l'équation

$$(65)\qquad x'_v y'_u - x'_u y'_v = V,$$

où V est une certaine fonction de v.

En substituant dans l'équation (65) les expressions (64) et en intégrant par rapport à u, on aura

$$\rho \sin(\varphi - v) = V u + \sigma,$$

où

$$\mu \sin\xi = u + w,$$

ayant compte des notations suivantes

$$\mu V = \rho, \qquad \sigma = wV, \qquad \varphi - v = \xi.$$

En employant les méthodes précédentes, on aura

$$\begin{aligned}\mu^2\cos^2\xi(x'^2 + y'^2) = {} & A_0\cos^3\xi + A_1\cos^2\xi\sin\xi + A_2\cos\xi\sin^2\xi + A_3\sin^3\xi \\ & + B_0\cos^2\xi + B_1\cos\xi\sin\xi + B_2\sin^2\xi \\ & + C_0\cos\xi + C_1\sin\xi + D_0.\end{aligned}$$

où

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -2\rho\mu^2, \quad A_2 = 2\rho\mu\mu', \quad A_3 = 0,$$
$$B_0 = \mu^2(\rho^2+1), \quad B_1 = -2\mu(\mu'+\rho w'), \quad B_2 = \mu'^2,$$
$$C_0 = 2\mu w', \quad C_1 = -2\mu' w', \quad D_0 = w'^2.$$

Calculons l'expression $x'y'' - x''y'$:

$$\begin{aligned}\mu^3\cos^3\xi(x'y''-y'x'') = {} & \mathcal{A}_0\cos^4\xi + \mathcal{A}_1\cos^3\xi\sin\xi + \mathcal{A}_2\cos^2\xi\sin^2\xi \\ & + \mathcal{A}_3\cos\xi\sin^3\xi + \mathcal{A}_4\sin^4\xi + \mathcal{B}_0\cos^3\xi \\ & + \mathcal{B}_1\cos^2\xi\sin\xi + \mathcal{B}_2\cos\xi\sin^2\xi + \mathcal{B}_3\sin^3\xi \\ & + \mathcal{C}_0\cos^2\xi + \mathcal{C}_1\cos\xi\sin\xi + \mathcal{C}_2\sin^2\xi \\ & + \mathcal{D}_0\cos\xi + \mathcal{D}_1\sin\xi + \mathcal{E}_0,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_0 = -\mu^3\rho', \quad \mathcal{A}_1 = -\rho(2\mu^3 + \mu^2\mu'' - 2\mu\mu'^2) + \rho'\mu^2\mu',$$
$$\mathcal{A}_2 = 3\mu^2\mu'\rho, \quad \mathcal{A}_3 = 0, \quad \mathcal{A}_4 = 0,$$
$$\mathcal{B}_0 = \mu^2[\rho w'' + \mu(\rho^2+1)] - \mu w'(\mu\rho' + 2\mu'\rho),$$
$$\mathcal{B}_1 = -3\mu^2(\mu' + w'\rho), \quad \mathcal{B}_2 = 3\mu\mu'^2, \quad \mathcal{B}_3 = -\mu'^3,$$
$$\mathcal{C}_0 = 3\mu^2 w', \quad \mathcal{D}_0 = 3\mu w'^2,$$
$$\mathcal{C}_1 = -6\mu\mu' w', \quad \mathcal{D}_1 = -3\mu' w'^2,$$
$$\mathcal{C}_2 = 3w'\mu'^2, \quad \mathcal{E}^0 = w'^3.$$

Pour résoudre le problème, il faut satisfaire à l'identité

$$(x'^2 + y'^2)^3 = [2Ku + L](x'y'' - x''y')^2,$$

laquelle, à cause de nos calculs, prendra la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} A_0\cos^3\xi + \ldots + A_3\sin^3\xi \\ B_0\cos^2\xi + \ldots + B_2\sin^2\xi \\ C_0\cos\xi + C_1\sin\xi \\ D_0 \end{Bmatrix}^3$$
$$= [2K(\mu\sin\xi - w) + L]\begin{Bmatrix} \mathcal{A}_0\cos^4\xi + \ldots + \mathcal{A}_4\sin^4\xi \\ \mathcal{B}_0\cos^3\xi + \ldots + \mathcal{B}_3\sin^3\xi \\ \mathcal{C}_0\cos^2\xi + \ldots + \mathcal{C}_2\sin^2\xi \\ \mathcal{D}_0\cos\xi + \mathcal{D}_1\sin\xi \\ \mathcal{E}_0 \end{Bmatrix}^2$$

Cette équation doit évidemment être satisfaite identiquement.

En posant $\xi = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$[D_0 + C_1 + B_2 + A_3]^3 = [2K(\mu - \varpi) + L][\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{E}_0]^2,$$

où

$$\begin{aligned}(\varpi'^2 - 2\mu'\varpi' + \mu'^2)^3 \\ = [2K(\mu - \varpi) + L](\varpi'^3 - 3\mu'\varpi'^2 + 3\mu'^2\varpi' - \mu'^3)^2,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mu - \varpi = \text{const.}$$

De la même manière, si l'on pose $\xi = -\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\mu + \varpi = \text{const.},$$

d'où l'on reçoit

$$\mu = \text{const.}, \qquad \varpi = \text{const.}$$

et par conséquent ξ est une fonction de u seule.

L'équation se simplifie considérablement

$$\mathcal{A}_0 = -\mu^3\rho', \qquad \mathcal{A}_1 = -2\mu^3\rho, \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{A}_3 = 0, \qquad \mathcal{A}_4 = 0,$$

$$\mathcal{B}_0 = \mu^3(\rho^2 + 1), \qquad \mathcal{B}_1 = 0, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_3 = 0.$$

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{E}_0 = 0.$$

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = -2\rho\mu^2, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

$$B_0 = \mu^2(\rho^2 + 1), \qquad B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad C_0 = C_1 = D_0 = 0.$$

On aura

$$\begin{aligned}(-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^3 \\ = [2K(\mu\sin\xi - \varpi) + L](-\rho'\cos\xi - 2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^2.\end{aligned}$$

En substituant $\xi = \frac{\pi}{2}$, on aura $\rho = \text{const.}$, d'où il vient

$$-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1 = 2K(\mu\sin\xi - \varpi) + L,$$

d'où

$$\rho = -\mathrm{K}\mu,$$
$$\rho^2 + 1 = \mathrm{L} - 2\mathrm{K}w.$$

On obtient $\mathrm{V} = -\mathrm{K}$, et nous pouvons passer de la variable v, exprimant l'angle de la tangente avec l'axe de x, à la véritable longitude en changeant v en $\mathrm{K}v + w$.

La courbe Σ est un cercle, et les projections seront déterminées par les équations

$$x = a - \mathrm{K}\mu \sin v + \cos\varphi,$$
$$y = b + \mathrm{K}\mu \cos v + \sin\varphi,$$

où

$$\mu \sin(\varphi - v) = u + w.$$

On voit aisément que les parallèles sont des cercles concentriques; de sorte que nous parvenons au cas déjà examiné.

Dans le cas $\rho = \infty$ on aura, par les raisonnements semblables, les projections dont les parallèles sont des droites parallèles entre elles et parallèles à la droite, lieu géométrique des centres des méridiens. On peut concevoir ce cas comme un cas limite du cas général.

Ainsi nous voyons que notre problème est complètement résolu.

En résumant tous nos résultats, *nous obtenons onze sortes de projections satisfaisant à toutes les conditions du problème.*

En prenant pour v la longitude, et pour u la fonction de la latitude correspondant à la forme

$$x'_u y'_v - y'_u x'_v = \pm 1,$$

de l'équation du problème nous aurons les projections suivantes :

I. $$\left\{\begin{aligned} x &= au + \alpha v, \\ y &= bu + \beta v, \end{aligned}\right\} \quad \text{où } a\beta - \alpha b = 1.$$

II. $$\left\{\begin{aligned} x &= (av + b)\sqrt{2ku + l}, \\ y &= (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l}, \end{aligned}\right\} \quad \text{où } k(a\beta - b\alpha) = 1.$$

III. $$\left\{\begin{aligned} x &= (au+b)\sqrt{2kv+l}, \\ y &= (\alpha u+\beta)\sqrt{2kv+l}, \end{aligned}\right\} \text{ où } k(b\alpha - a\beta) = 1.$$

IV. $$\left\{\begin{aligned} x &= a - \frac{u+w}{b}, \\ y &= bv + \beta + \frac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (u+w)^2}. \end{aligned}\right.$$

V. $$\left\{\begin{aligned} x &= a - \frac{v+w}{b}, \\ y &= bu + \beta + \frac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (v+w)^2}. \end{aligned}\right.$$

VI. $$\left\{\begin{aligned} x &= \delta\cos\frac{u+\varepsilon}{k} - \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\sqrt{2kv+l}, \\ y &= \delta\sin\frac{u+\varepsilon}{k} + \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\sqrt{2kv+l}. \end{aligned}\right.$$

VII. $$\left\{\begin{aligned} x &= \delta\cos\frac{v+\varepsilon}{k} - \sin\frac{v+\varepsilon}{k}\sqrt{2ku+l}, \\ y &= \delta\sin\frac{v+\varepsilon}{k} + \cos\frac{v+\varepsilon}{k}\sqrt{2ku+l}. \end{aligned}\right.$$

VIII. $$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2kv+l}\left[\frac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right], \\ y &= \sqrt{2kv+l}\left[\frac{\mu}{k} + \sin\varphi\right], \\ &\text{où } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = u + \sigma. \end{aligned}\right.$$

IX. $$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2ku+l}\left[\frac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right], \\ y &= \sqrt{2ku+l}\left[\frac{\mu}{k} + \sin\varphi\right], \\ &\text{où } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = v + \sigma. \end{aligned}\right.$$

X. $$\left\{\begin{aligned} x &= \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A}, \\ y &= \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A}, \\ &\text{où } \rho = \sqrt{2kv+l}, \qquad \Delta = \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2 + A^2 - R^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} x = \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\,\dfrac{\rho^2+\mathrm{A}^2-\mathrm{R}^2}{2\mathrm{A}} - \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\,\dfrac{\Delta}{2\mathrm{A}},\\[2ex] y = \sin\dfrac{v+\varepsilon}{k}\,\dfrac{\rho^2+\mathrm{A}^2-\mathrm{R}^2}{2\mathrm{A}} + \cos\dfrac{v+\varepsilon}{k}\,\dfrac{\Delta}{2\mathrm{A}},\\[2ex] \text{où } \rho = \sqrt{2ku+l}, \qquad \Delta = \sqrt{4\mathrm{A}^2\rho^2-(\rho^2+\mathrm{A}^2-\mathrm{R}^2)^2}. \end{cases}$$

Pour fixer les idées, nous avons considéré la représentation des surfaces de révolution; mais il faut bien remarquer que tous nos résultats s'appliquent aussi bien à la représentation de chaque surface courbe; car, quelle que soit la surface représentée, on peut, par un choix convenable des coordonnées curvilignes, ramener à la forme (1) l'équation des projections qui conservent les aires.

Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones [1];

PAR M. ED. MAILLET.

Nous avons communiqué au Congrès de Bordeaux (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1895) la propriété suivante :

Tout nombre entier est la somme de dix-sept cubes d'entiers positifs au plus, dont douze au plus différents de 1 *ou* 0.

La méthode qui nous y a conduit, et qui est directement inspirée des démonstrations données par Cauchy [2] et Legendre [3] du théorème de Fermat sur les nombres polygones, s'étend, avec des modifications sensibles, des cubes aux nombres entiers positifs de la forme

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

où les coefficients $a, a_1, \ldots, a_5$ sont entiers ou fractionnaires, mais tels

---

(1) Nous avons déjà établi d'autres extensions du théorème de Fermat par une méthode différente dans le *Bulletin de la Société Mathém.*, t. XXIII; 1895.

(2) *Exerc. de Math.*, t. I, p. 273, et *Mémoires de l'Institut.*

(3) *Théorie des nombres*, 3e édit., t. II, p. 338.

que $\varphi(x)$ soit entier et positif pour toute valeur entière de $x \geq \mu$, μ étant fini, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'expression*

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

où $a, a_1, \ldots, a_5$ sont donnés et rationnels, est entière et positive pour toute valeur entière de $x \geq \mu$, μ étant fini, et de degré 2, 3, 4 ou 5, tout nombre entier supérieur à une certaine limite fonction de a, $a_1, \ldots, a_5$ est la somme d'un nombre limité (au plus 6 pour le degré 2, 12 pour le degré 3, 96 pour le degré 4, 192 pour le degré 5) de nombres positifs $\varphi(x)$, à un nombre limité d'unités près.

Nous en ferons application en particulier aux nombres pyramidaux (théorème II).

La méthode que nous allons indiquer donnera, en même temps, un moyen d'effectuer cette décomposition par un nombre de manières qui augmente indéfiniment, quand le nombre entier à décomposer croît indéfiniment.

D'après les hypothèses faites, le terme indépendant de x est entier, et si le théorème est vrai pour $\varphi(x)$, il le sera pour $\varphi(x) - a_5$, et réciproquement; la limite inférieure, à partir de laquelle le théorème est vrai, et la quantité μ pourront seulement varier d'un nombre limité. Il suffit donc d'établir le théorème en supposant $a_5 = 0$.

I. — Cas où $\varphi(x)$ est de degré 2 ou 3.

Nous admettrons d'abord que les coefficients de $\varphi(x)$ soient entiers; l'extension de la propriété, au cas où ils sont fractionnaires, se fera ensuite sans peine.

Soit alors, en changeant légèrement la notation,

$$\varphi(x) = ax^3 + a_1 x^2 + a_2 x,$$

avec $a > 0$, ou $a = 0$, $a_1 > 0$, puisqu'on suppose $\varphi(x)$ positif pour x

suffisamment grand, et μ la plus petite valeur entière de x, telle que $\varphi(x) > 0$ pour $x \geq \mu$. Considérons l'identité

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + x) + \varphi(\alpha - x) = 2[\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)x^2] \\ \text{où} \\ 0 \leq x \leq \alpha - \mu \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0; \end{cases}$$

les deux termes du premier membre sont positifs.

Donnons à x trois valeurs x_1, x_2, x_3 entières satisfaisant à (1), et additionnons membre à membre les identités (1) correspondantes; il vient

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_1^3{}_i [\varphi(\alpha + x_i) + \varphi(\alpha - x_i)] \\ \quad = 2[3\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)\sum_1^3{}_i x_i^2] \\ \quad = 2[3\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)m], \end{cases}$$

en posant

$$m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Les conditions (1) relatives à x_1, x_2, x_3 seront d'ailleurs forcément satisfaites, si

$$(3) \qquad 0 \leq m \leq (\alpha - \mu)^2 \quad \text{et} \quad \alpha \geq 0,$$

ce que nous supposerons.

Dès lors, tout nombre entier m, qui n'est pas de la forme

$$4^h(8n + 7) \quad \text{avec} \quad h \geq 0,$$

étant [1] la somme de trois carrés, donnera lieu à une identité de la forme (2), s'il satisfait à (3).

---

[1] Legendre, *Théorie des nombres*, 3e édit., t. I, p. 393 et suiv.

Posant maintenant (m, m', α, α' étant entiers)

$$(4)\qquad \begin{cases} 0 \leq m < (\alpha - \mu)^2 \\ 0 \leq m' < (\alpha' - \mu)^2 \end{cases} m \text{ et } m' \neq 4^h(8n+7), \quad 0 \leq \alpha < \alpha',$$

$$k = 3a\alpha + a_1, \qquad k' = 3a\alpha' + a_1,$$

$$(5)\qquad A - 3[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] = km + k'm' = A',$$

tout nombre entier $2A$ ainsi obtenu sera, d'après (2), la somme de douze nombres positifs $\varphi(x)$.

Ceci va nous permettre d'établir le théorème pour les nombres entiers compris dans un certain intervalle dépendant de α et α'.

Soit δ le plus grand commun diviseur de $3a$ et de a_1,

$$(6)\qquad \begin{cases} 3a = a'\delta, \qquad a_1 = a'_1\delta, \\ \text{avec } a' \text{ et } a'_1 \text{ premiers entre eux}, \\ k = \delta(a'\alpha + a'_1), \qquad k' = \delta(a'\alpha' + a'_1). \end{cases}$$

Posant

$$(7)\qquad \alpha' = \alpha + 2^\nu \qquad (\nu \text{ entier} \geq 1),$$

et prenant α impair, quand a' impair et a'_1 pair, α pair dans les autres cas (1), on voit que $a'\alpha + a'_1$ et $a'\alpha' + a'_1$ sont impairs, puisque a' et a'_1 sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur devant diviser $a'(\alpha' - \alpha)$ et $a'_1(\alpha' - \alpha)$: δ est donc le plus grand commun diviseur de k et k', et si

$$(8)\qquad \begin{cases} k_1 = a'\alpha + a'_1, \qquad k'_1 = a'\alpha' + a'_1, \qquad A'' = k_1 m + k'_1 m', \\ \text{où } k_1, k'_1 \text{ sont impairs et premiers entre eux}, \end{cases}$$

(1) Quand a_1 pair et a'_1 impair, on pourrait prendre aussi α impair. Nous supposons α assez grand pour que $k > 0$, $k' > 0$.

l'on a

$$(9) \qquad \begin{cases} k = \delta k_1, & k' = \delta k'_1, \\ \Lambda - 3[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] = \delta \Lambda', & \Lambda' = \delta \Lambda'', \end{cases}$$

en tenant compte de (5).

Considérons maintenant l'égalité

$$(10) \qquad m' = \frac{\Lambda'' - k_1 m}{k'_1},$$

déduite de (8). Λ'' étant un entier arbitrairement choisi, si l'on substitue dans cette égalité à m les $8k'_1$ valeurs consécutives

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 8k'_1 - 1,$$

elle donnera pour m' des valeurs entières ou non, mais positives, si

$$(11) \qquad \Lambda'' \geqq 8k_1 k'_1,$$

ce que nous supposerons. Admettant, de plus, que l'on ait

$$(12) \qquad 8k'_1 \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad \Lambda'' \leqq k'_1(\alpha' - \mu)^2,$$

les valeurs m et m' obtenues satisferont aux conditions

$$0 \leqq m \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad 0 \leqq m' \leqq (\alpha' - \mu)^2.$$

De plus, je dis qu'il y aura toujours un des systèmes m, m' au moins tel que m et m' soient entiers sans être de la forme $4^h(8n + 7)$.

En effet, parmi les nombres

$$\Lambda'', \quad \Lambda'' - k_1, \quad \Lambda'' - 2k_1, \quad \ldots, \quad \Lambda'' - (8k'_1 - 1)k_1,$$

on en aura exactement 8 divisibles par k'_1, car on n'a

$$\Lambda'' - lk_1 \equiv \Lambda'' - l'k_1 \qquad (\bmod k'_1)$$

que si $(l - l')k_1 \equiv 0 \pmod{k'_1}$, ce qui exige $l \equiv l' \pmod{k'_1}$, puisque k_1

et k'_1 sont premiers entre eux. Dès lors les 8 systèmes m, m' correspondant aux 8 valeurs $\Lambda'' - lk_1$ divisibles par k'_1 sont formés de valeurs m, m' entières et de la forme

$$(13) \qquad m_1 + jk'_1, \quad m'_1 - jk_1 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, 7),$$

respectivement. Les 8 nombres $0, k'_1, 2k'_1, \ldots, 7k'_1$ sont incongrus entre eux (mod 8), puisque k'_1 est impair; de même pour les 8 nombres 0, $k_1, 2k_1, \ldots, 7k_1$. Par suite, parmi les 8 nombres $m_1 + jk'_1$ il y en a 3 au plus de la forme $4^h(8n+7)$; de même parmi les 8 nombres $m'_1 - jk_1$. Donc, parmi les 8 systèmes (13), il y en a deux au moins pour lesquels ni m, ni m' ne sont de la forme $4^h(8n+7)$; prenant l'un de ces systèmes, m et m' sont chacun la somme de 3 carrés, et si $\alpha \geq 0$, d'après (4), (5), (9) et (12), le nombre 2Λ, correspondant à la valeur de Λ'', valeur satisfaisant à (8), (11) et (12), est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$.

Les conditions trouvées pour Λ, Λ'', α, α' peuvent s'écrire, d'après (4), (6), (7), (8), (11) et (12),

$$(14) \qquad \begin{cases} 0 < \alpha = \alpha' - 2^\nu & (\nu \geq 1) \\ 0 < 3a\alpha + a_1 & \\ 8(3a\alpha' + a_1) \geq \delta(\alpha - \mu)^2, & \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \text{ pair, sauf quand } \frac{3a}{\delta} \text{ est impair et } \frac{a_1}{\delta} \text{ pair,}$$

$$(15) \qquad \frac{8}{\delta}(3a\alpha + a_1)(3a\alpha' + a_1) > \delta\Lambda'' \geq (3a\alpha + a_1)(\alpha' - \mu)^2;$$

or, ν' étant donné, on peut toujours prendre α assez grand pour que (14) ait lieu quand ν est un entier quelconque $> \nu'$. Donc, d'après (9), on peut prendre α assez grand pour que tout nombre entier

$$(16) \qquad 2\Lambda = 6[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 2\delta\Lambda'',$$

où Λ'' est un entier quelconque satisfaisant à (15), soit la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$, ν étant supposé $> \nu'$. Donnant alors à Λ'' toutes les valeurs entières compatibles avec (15), puis ajoutant à chaque nombre 2Λ obtenu λ unités avec $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2\delta - 1$, on

obtient tous les nombres entiers B tels que

$$(17)\quad \begin{cases} 6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+\frac{16}{\delta}(3a\alpha+a_1)(3a\alpha'+a_1)+2\delta \\ \qquad \leqq B \leqq 6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+2(3a\alpha'+a_1)(\alpha'-\mu)^2, \end{cases}$$

et le théorème I est vrai pour ces nombres B, qui sont la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$ et de $2\delta-1$ unités au plus (la réduction de ce nombre à 6 quand $a=0$ ne sera opérée que plus loin, dans la Remarque II).

Si maintenant nous donnons à α des valeurs paires ou impaires suivant les conditions (14), mais croissantes à partir de la limite inférieure résultant de (14), comme nous l'avons indiqué, nous obtenons une suite d'intervalles limités par les valeurs du premier et du dernier membre de (17), et pour lesquels le théorème est vrai ; pour établir ce dernier dans toute sa généralité, il suffit donc de montrer que, pour α assez grand, les intervalles ne sont séparés par aucun nombre entier, auquel cas nous dirons qu'ils sont contigus.

Considérons deux intervalles (17) correspondant à des valeurs α et $\alpha+2$; il suffira que la limite supérieure du premier soit au moins égale à la limite inférieure du deuxième, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+2(3a\alpha'+a_1)(\alpha-\mu)^2 \\ &\quad \geqq 6[\varphi(\alpha+2)+\varphi(\alpha'+2)] \\ &\qquad +\frac{16}{\delta}[3a(\alpha+2)+a_1][3a(\alpha'+2)+a_1]+2\delta, \end{aligned}$$

condition à laquelle on satisfait, pour $\nu \leqq \nu'$, en prenant α supérieur à une limite finie et déterminée, puisque les deux membres de cette inégalité sont des polynomes du troisième (ou du deuxième si $a=0$) degré en α, quand on y remplace α' par $\alpha+2^\nu$, et que le coefficient de α^3 (ou de α^2) sont respectivement dans le premier et le deuxième membre $18a$ et $12a$ (ou $14a_1$ et $12a_1$). C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons établi que le nombre des décompositions augmente indéfiniment avec B, par ce fait que l'on peut toujours prendre B assez grand pour que le nombre des valeurs de ν accep-

tables soit aussi grand qu'on veut. On peut encore obtenir le même résultat en remarquant que l'on peut prendre B assez grand pour que le nombre des intervalles (17) dont il fait partie soit aussi grand qu'on veut. En effet, si $\psi(\alpha)$ et $\chi(\alpha)$ sont le premier et le dernier membre de (17), on peut prendre α_1 assez grand pour que, ρ étant un entier donné, on ait pour $\alpha \geq \alpha_1$,

$$(18) \qquad \begin{cases} \chi(\alpha) \geq \psi(\alpha + 2\rho), \\ \dfrac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \geq 0, \qquad \dfrac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} \geq 0. \end{cases}$$

Si B est suffisamment grand, on peut trouver α (pair ou impair suivant les cas) tel que $\alpha \geq \alpha_1$, et que

$$\psi(\alpha + 2\rho) \geq B > \psi(\alpha + 2\rho - 2).$$

D'après (18), B est compris dans les ρ intervalles (17) correspondant aux valeurs de α égales à α, $\alpha + 2$, $\alpha + 4$, ..., $\alpha + 2\rho - 2$; à chacun de ces intervalles correspond alors au moins une décomposition de B conformément au théorème établi.

On peut d'ailleurs prendre ν' ou ρ assez grand pour que, parmi les décompositions obtenues ainsi pour un même nombre B, on en ait autant qu'on veut de distinctes ; car soit

$$B = \sum_{1}^{12}{}_i \, \varphi(\xi_i) + \varepsilon,$$

où ξ_i, ε entiers, $0 \leq \varepsilon \leq 2\delta - 1$, une décomposition de B ; les valeurs de α qui ont pu la donner sont comprises parmi les nombres $\xi_i + \xi_j$, avec $i \neq j$, c'est-à-dire en nombre $\leq C_{12}^2 = 66$. Donc, parmi les décompositions ci-dessus indiquées, en nombre au moins égal à ν ou ρ, on en aura au moins $\frac{\nu}{66}$ ou $\frac{\rho}{66}$ essentiellement distinctes, ce qui établit le résultat annoncé.

Nous avons ainsi établi le théorème dans le cas où a, a_1, a_2 sont entiers. S'ils sont fractionnaires, il faudra et il suffira ([1]), pour que

---

([1]) Comparer, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, les réponses à la question 484.

$\varphi(x)$ soit entier pour les valeurs de $x \geqq \mu$, que $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ le soient, puisque $\varphi(x)$ est le terme général d'une suite récurrente d'équation génératrice $(y-1)^4 = 0$. On en conclut sans peine que le plus petit dénominateur commun de a_1, a_2, a_3 est un diviseur de 6. Alors $6\varphi(x)$ a ses coefficients entiers, et l'on peut lui appliquer les résultats précédemment obtenus. On en conclura que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est, à un nombre limité, mais multiple de 6, d'unités près, la somme de 12 nombres $6\varphi(x)$ positifs.

Un nombre quelconque supérieur à une certaine limite est alors, à un nombre limité d'unités près, la somme de 12 nombres $\varphi(x)$ positifs : ce que nous avons dit du nombre des décompositions distinctes reste applicable.

Application aux nombres pyramidaux. — Ils sont de la forme $\dfrac{x^3 - x}{6}$, avec $x \geqq 0$.

Considérant $\varpi(x) = x^3 - x$, on a

$$a = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = -1, \qquad \mu = 0, \qquad \delta = 3.$$

Prenons $\nu = 1$, α impair, $\alpha' = \alpha + 2$,

$$2A = 6C = 6[\varpi(\alpha) + \varpi(\alpha')] + 6A',$$

où C est entier : (15) donnera

$$8\alpha\alpha' \geqq A'' \alpha'^3.$$

La condition (14) donne $8\alpha' < \alpha^2$, c'est-à-dire $\alpha \geqq 11$, puisque α est impair. On en conclut que, pour $\alpha \geqq 11$, tout nombre 6C multiple de 6, et tel que

$$(19) \qquad \alpha^3 - \alpha + \alpha'^3 - \alpha' + 8\alpha\alpha' \leqq C \leqq \alpha^3 - \alpha + 2\alpha'^3 - \alpha'$$

est la somme de 12 nombres $\varpi(x)$ positifs.

Prenant alors α assez grand pour que

$$\alpha^3 - \alpha + 2\alpha'^3 - \alpha' \geqq (\alpha+2)^3 - (\alpha+2) + (\alpha'+2)^3 - (\alpha+2) + 8(\alpha+2)(\alpha'+2),$$

ce qui exige

$$\alpha^4 - 14\alpha^2 - 84\alpha - 116 \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha \geqq 19;$$

on en conclut que, pour $\alpha \geqq 19$, les intervalles (19) sont contigus, et que tout nombre $6\mathrm{C}$, multiple de 6, et tel que

$$\mathrm{C} = \overline{19}^3 - 19 + \overline{21}^3 - 21 + 8.19.21 = 19272$$

est la somme de 12 nombres positifs $\varpi(x)$. Par suite, tout nombre

$$\mathrm{C} \geqq 19272$$

est la somme de 12 nombres positifs de la forme $\frac{\varpi(x)}{6} = \frac{x^3 - x}{6}$, et

Théorème II. — *Tout nombre entier $\geqq 19272$ est la somme de douze nombres pyramidaux au plus* (¹).

A titre d'application numérique, prenons $\mathrm{C} = 20000$: on peut prendre $\alpha = 19$, et (10) devient

$$3920 = 19m + 21m'.$$

On a six systèmes de valeurs de m et de m', dont aucune n'est de la forme $4^h(8n + 7)$; l'un d'eux, par exemple, $m = 14$, $m' = 174$, donnera, d'après $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$,

$$174 = \overline{13}^2 + 2^2 + 1^2 = \overline{11}^2 + 7^2 + 2^2 = \overline{10}^2 + 7^2 + 5^2.$$

(¹) De même, la formule (16) permet de montrer

1° Quand $\varphi(x)$ a ses coefficients entiers et que $\delta = 3$, que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$;

2° Quand $\varphi(x)$ a ses coefficients a, a_1, a_2 fractionnaires, si D est leur plus petit dénominateur commun, et si le plus grand commun diviseur de $3\mathrm{D}a$ et $\mathrm{D}a_1$ est 3, que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est la somme de 12 nombres positifs $\mathrm{D}\varphi(x)$, en sorte que tout entier supérieur à une certaine limite, et multiple de $\frac{6}{\mathrm{D}}$, est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$.

en partant, par exemple, de la première décomposition de 174 en une somme de 3 carrés :

$$20000 = \sum_{1}^{12} {}_i \frac{x_i^3 - x_i}{6},$$

où les 12 valeurs de x_i sont

22, 16, 21, 17, 20, 18, 34, 8, 23, 19, 22, 20.

Remarque I. — Nous avons utilisé ici la représentation des nombres m, m' à l'aide d'une somme de trois carrés. En utilisant d'autres représentations, on peut obtenir des théorèmes analogues. Nous en avons donné un exemple au Congrès de Bordeaux.

Remarque II. — Quand $\varphi(x)$ est du deuxième degré, c'est-à-dire quand $a = 0$, $a_1 > 0$, $\delta = a_1$, $k_1 = k'_1 = 1$, les raisonnements précédents peuvent être simplifiés : en effet, supposons d'abord que $\varphi(x)$ ait ses coefficients entiers; pour une valeur donnée de α, remarquant que, sur 3 nombres consécutifs, on en a un $\neq 4^h(8n+7)$, on voit que, quand m prend toutes celles des valeurs $0, 1, 2, \ldots, (\alpha - \mu)^2$ différentes de $4^h(8n+7)$, $6\varphi(\alpha) + 2a_1 m$ prend, à $6a_1 - 1$ unités près au plus, toutes les valeurs comprises entre $6\varphi(\alpha)$ et

$$6\varphi(\alpha) + 2a_1(\alpha - \mu)^2,$$

et tout nombre compris dans cet intervalle est, d'après (1), (2) et (3), la somme de 6 nombres positifs $\varphi(x)$, à un nombre limité d'unités près. On voit d'ailleurs que les intervalles, obtenus en faisant varier α, sont contigus dès que α est supérieur à une certaine limite, que le nombre des décompositions distinctes augmente encore indéfiniment avec le nombre à décomposer, et que ces propriétés s'étendent au cas où a_1 et a_2 seraient fractionnaires. Donc, quand $\varphi(x)$ est du deuxième degré, tout entier supérieur à une certaine limite est la somme de 6 nombres positifs $\varphi(x)$ seulement.

On sait que, pour une foule de valeurs a_1 et a_2, il suffit, en réalité, de 4 nombres positifs $\varphi(x)$, d'après le théorème de Fermat sur les nombres polygones, perfectionné par Cauchy et Legendre, et les ex-

tensions que nous en avons données [1]. Mais il est à remarquer que les décompositions obtenues ici sont d'un genre spécial, en ce sens que les 6 valeurs des x, entrant dans $\varphi(x)$, sont telles que les 3 sommes 2 à 2 de ces 6 quantités formées convenablement sont égales à un même nombre α; en sorte que nous avons résolu ici, en réalité, le problème suivant [2] :

Trouver 6 valeurs de x, telles que

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \varphi(x_4) + \varphi(x_5) + \varphi(x_6)$$

ne diffère d'un nombre donné B *au moins égal à une limite déterminée que d'un nombre limité d'unités et qu'on ait en même temps*

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6.$$

II. — Cas où $\varphi(x)$ est de degré 4 ou 5.

La méthode précédente s'étend, à l'aide d'un raisonnement plus compliqué, au cas où $\varphi(x)$ est du quatrième ou du cinquième degré. On peut encore supposer $a_5 = 0$. De plus, le plus petit dénominateur commun aux a_i étant limité, quand quelques uns de ceux-ci sont fractionnaires, il suffit d'établir le théorème I pour le cas où les coefficients a_i sont entiers.

Soit donc

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x,$$

avec $a, a_1, \ldots, a_4$ entiers et si $a = 0$, $a_1 > 0$.

Considérons

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha + x) + \varphi(\alpha - x) = 2\left[\varphi(\alpha) + \dfrac{\varphi''(\alpha)}{2!}x^2 + \dfrac{\varphi^{\text{IV}}(\alpha)}{4!}x^4\right], \\ \text{où} \\ 0 \leq x \leq \alpha - \mu \qquad \text{et} \qquad \alpha \geq 0; \end{array}\right.$$

---

[1] *Bull. de la Soc. math., loc. cit.*

[2] Des remarques analogues s'appliquent au paragraphe suivant.

et

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi''(\alpha)}{2!} = A_1 = 10a\alpha^3 + 6a_1\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_3, \\ \dfrac{\varphi^{\text{IV}}(\alpha)}{4!} = B_1 = 5a\alpha + a_1. \end{cases}$$

On sait, d'après Cauchy (¹), que l'on peut toujours trouver, k et l étant impairs et donnés, f, g, h, e entiers, positifs, et tels que

$$k = f^2 + g^2 + h^2 + e^2, \qquad l = f + g + h + e,$$

si

$$\sqrt{3k-2} - 1 < l < \sqrt{4k},$$

ou, *a fortiori*, si

$$(22)\qquad \sqrt{3k} < l < \sqrt{4k}.$$

On en conclut sans peine, d'après un théorème de Liouville (²), que l'on peut trouver λ valeurs x_i, avec $\lambda \leqq 48$, et telles que

$$6l = \sum_1^\lambda {}_i x_i^2, \qquad 6k = \sum_1^\lambda {}_i x_i^4,$$

sous les mêmes conditions (22).

Si l'on suppose alors

$$(23)\qquad 6l \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad 6k \leqq (\alpha - \mu)^4,$$

les valeurs x_i^2 seront $\leqq (\alpha - \mu)^2$ et telles que $\varphi(\alpha - x_i)$ et $\varphi(\alpha + x_i)$ soient positifs. Les valeurs x_i donneront chacune lieu à une identité (20), et l'addition membre à membre de ces identités montre que

$$(24)\qquad 2\lambda\varphi(\alpha) + 12(A_1 l + B_1 k) = \sum_1^\lambda {}_i [\varphi(\alpha + x_i) + \varphi(\alpha - x_i)],$$

(¹) *Loc. cit.*

(²) Voir *Bull. de la Soc. math.*, 1895, *loc. cit.*, et LE BESGUE, *Exercices d'Analyse numérique*. Librairie Leiber et Faraguet, Paris, 1859, p. 113.

d'après (21), et le premier membre de (24) est la somme de 2λ nombres positifs $\varphi(x)$ au plus.

On peut remarquer que la seconde des conditions (23) est superflue d'après (22), car $3k < l^2$ donne

$$6k < \frac{(\alpha-\mu)^4}{18}.$$

Alors, pour une valeur donnée impaire de l satisfaisant à (23), on aura $\rho + 1$ valeurs impaires de k

(25) $$k_1, \quad k_1 + 2, \quad k_1 + 4, \quad \ldots, \quad k_1 + 2\rho,$$

satisfaisant à (22), par suite à (23), si

(26) $$\sqrt{3(k_1 + 2\rho)} < l < \sqrt{4k_1},$$

et tout nombre impair k_1 satisfera à ces conditions, pourvu que

(27) $$\rho \leqq \frac{k_1}{12}, \qquad \sqrt{\tfrac{7}{2}k_1} < l < \sqrt{4k_1}, \qquad l \geqq 15,$$

car ces conditions entraînent la condition (26) et la condition

$$\sqrt{3(k_1 + 2\rho)} \leqq \sqrt{\tfrac{7}{2}k_1} \leqq \sqrt{4k_1} - 2.$$

En résumé, l étant un nombre impair satisfaisant à (23) et (27), et k_1 un impair satisfaisant à (27), si l'on prend pour ρ un entier quelconque satisfaisant à (27), les ρ valeurs (25) sont des valeurs impaires de k satisfaisant à (22) et (23), et dont chacune donne lieu avec l à une identité (24).

Pour une autre valeur $\alpha' \geqq 0$ de α, on aura des valeurs l', k', ρ', k'_1, A'_1, B'_1, analogues à l, k, ρ, k_1, A_1, B_1, avec les relations

$$6l' = \sum_1^{\lambda} {}_i\, x_i'^2, \qquad 6k' = \sum_1^{\lambda} {}_i\, x_i'^4,$$

(23 *bis*) $$6l' \leqq (\alpha' - \mu)^2,$$

(24 *bis*) $2\lambda\varphi(\alpha') + 12(A'_1 l' + B'_1 k') = \sum_{i}^{\lambda} [\varphi(\alpha' + x'_i) + \varphi(\alpha' - x'_i)]$,

(27 *bis*) $\rho' \leqq \frac{k'_1}{12}$, $\sqrt{\frac{7}{2} k'_1} < l' < \sqrt{4 k'_1}$, $l' \geqq 15$,

les $\rho' + 1$ valeurs admissibles de k' étant

(25 *bis*) k'_1, $k'_1 + 2$, $k'_1 + 4$, $\ldots$, $k'_1 + 2\rho'$.

Considérons alors l'expression

(28) $$M = A_1 l + B_1 k + A'_1 l' + B'_1 k',$$

où k et k' prennent les valeurs (25) et (25 *bis*), puis posons

(29) $$\left\{\begin{array}{l} k = k_1 + 2\theta, \qquad k' = k'_1 + 2\theta', \\ \qquad \text{où} \\ \qquad \theta = 0, 1, 2, \ldots, \rho, \qquad \theta' = 0, 1, 2, \ldots, \rho', \\ P = A_1 l + B_1 k_1 + A'_1 l' + B'_1 k'_1, \\ Q = B_1 \theta + B'_1 \theta' = (5a\alpha + a_1)\theta + (5a\alpha' + a_1)\theta', \\ M = P + 2Q, \end{array}\right.$$

d'après (21) et (28).

Si δ est le plus grand commun diviseur de $5a$ et de a_1, et si l'on pose

(30) $5a = a'\delta$, $a_1 = a'_1\delta$, où a_1, a'_1 premiers entre eux,

(31) $$\alpha' - \alpha = 2^\nu \qquad (\nu \geqq 1),$$

le plus grand commun diviseur de $5a\alpha + a_1$ et $5a\alpha' + a_1$ sera δ, à condition de choisir α pair si a'_1 impair, α impair si a'_1 pair, et l'on pourra écrire

$$Q = Q'\delta, \qquad Q' = (a'\alpha + a'_1)\theta + (a'\alpha' + a'_1)\theta',$$

où $a'\alpha + a'_1$ et $a'\alpha' + a'_1$ sont premiers entre eux.

Alors, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait à propos de la formule (10), on voit qu'en supposant

$$a'\alpha + a'_1 > 0, \qquad \rho + 1 \geqq a'\alpha' + a'_1,$$

ce qui entraîne, d'après (31), $a'\alpha' + a'_1 > 0$, on peut toujours déterminer au moins une valeur entière de $\theta \leqq \rho$ et une de $\theta' \leqq \rho'$, telles que Q' soit un nombre entier arbitraire satisfaisant à

$$\rho(a'\alpha + a'_1) \leqq Q' \leqq \rho'(a'\alpha' + a'_1).$$

On peut donc disposer de θ et de θ' de façon que M prenne toutes les valeurs $P + 2\delta Q'$, c'est-à-dire que M prenne, à $2\delta - 1$ unités près au plus, toutes les valeurs entières comprises entre

$$P + 2\delta\rho(a'\alpha + a'_1) \qquad \text{et} \qquad P + 2\delta\rho'(a'\alpha' + a_1),$$

ou, *a fortiori*, d'après (27), (27 *bis*) et (30), toutes les valeurs entières comprises entre

(32) $$P + \frac{k_1}{6}B_1 \qquad \text{et} \qquad P + \left(\frac{k'_1}{6} - 2\right)B'_1,$$

à condition de prendre

$$\frac{k_1}{12} \geqq a'\alpha' + a'_1, \qquad \rho \geqq \frac{k_1}{12} - 1, \qquad \rho' \geqq \frac{k'_1}{12} - 1.$$

En faisant varier l' et k'_1 sous les conditions (23 *bis*) et (27 *bis*) pour une valeur déterminée de α, on obtient toute une série d'intervalles analogues à (32); nous allons voir que, pour α assez grand, ces intervalles sont contigus.

En effet, faisons croître k'_1 de deux unités : il pourra se faire que la même valeur l' soit admissible, et, quand on la prend, P croît de $2B'_1$ (en supposant α assez grand pour que A_1, B_1, A'_1, B'_1 soient positifs). Si cette même valeur de l' n'est pas admissible, on pourra prendre en général [sous la condition (23 *bis*) correspondante], au lieu de l', la valeur $l' + 2$, car on avait $\sqrt{\frac{7}{2}k'_1} < l'$, et l'on a, comme on voit faci-

lement,

$$\sqrt{\tfrac{7}{2}(k'_1+2)} \geqq \sqrt{\tfrac{7}{2}k'_1}+2,$$

puisque $l' \geqq 15$: alors P croît de $2(A'_1+B'_1)$.

On obtient ainsi un nouvel intervalle comprenant en particulier tous les nombres compris entre

$$P+2(A'_1+B'_1)+\frac{k_1}{6}B_1 \qquad \text{et} \qquad P+\left(\frac{k'_1}{6}-2\right)B'_1,$$

et le nouvel intervalle est contigu au premier dès que

$$\left(\frac{k'_1}{6}-2\right)B'_1 \geqq \frac{k_1}{6}B_1+2(A'_1+B'_1).$$

Cette condition sera toujours satisfaite pour α assez grand si

$$(33) \qquad \begin{cases} k'_1 \geqq sk_1, & \text{avec} \quad s-1 \text{ fini}, \\ k'_1 \geqq \alpha^{2+\eta}, & \text{avec} \quad \eta > 0 \text{ et } \eta \text{ fini}. \end{cases}$$

On voit de même que si, laissant k'_1 fixe, et faisant croître l' de deux unités, au cas où cela serait possible, le nouvel intervalle (32) est contigu au premier pour α assez grand quand les conditions (33) ont lieu.

Dès lors, l et k_1 étant des impairs donnés, et choisissant $s=2$, $k_1 \geqq \alpha^{2+\eta}$, ce qui entraîne pour α assez grand la condition $\frac{k_1}{12} \geqq a'\alpha'+a_1$, la plus petite valeur admissible de k'_1, d'après (33), est $2k_1+1$, et la plus petite valeur admissible de l' est $\leqq 2l+1$, car $\sqrt{\frac{7}{2}k_1}<l$ entraîne $\sqrt{\frac{7}{2}(2k_1+1)}<2l+1$.

D'autre part, la plus forte valeur admissible de l' est, d'après (23 *bis*), le plus grand entier impair $\leqq \frac{(\alpha'-\mu)^2}{6}$, c'est-à-dire qu'elle est telle que

$$l'+2>\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6}, \qquad \text{ou} \qquad l'>\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6}-2;$$

la plus forte valeur correspondante de k'_1 admissible est telle que

$$4k'_1>l'^2, \qquad \text{ou} \qquad k'_1>\frac{1}{4}\left[\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6}-2\right]^2.$$

De là et de ce qui précède on conclut que, l et k_1 étant donnés

avec $s = 2$ et $k_1 \leqq \alpha^{2+\eta}$, pour une valeur donnée de α, les intervalles (32) obtenus en faisant varier l' et k'_1, pris tous ensemble, renferment, pour α assez grand, tous les nombres compris entre

$$(34)\quad \begin{cases} \Delta_1 = A_1 l + B_1 k_1 + A'_1(2l+1) + B'_1(2k_1+1) + \frac{k_1}{6} B_1 \\ \text{et} \\ \Delta_2 = A_1 l + B_1 k_1 - 2B'_1 + A'_1\left[\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6} - 2\right] + \frac{7}{24} B_1 \left[\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6} - 2\right]^2, \end{cases}$$

d'après (29), en sorte que M peut prendre, à $2\delta - 1$ unités près, toutes les valeurs entières comprises dans l'intervalle (34).

Additionnant membre à membre (24) et (24 *bis*), on voit que $2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12M$ est la somme de 4λ nombres positifs $\varphi(x)$, et peut prendre, à $12(2\delta - 1) + 11 = 24\delta - 1$ unités près au plus, toute valeur entière comprise entre

$$(35)\quad 2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12\Delta_1 \qquad \text{et} \qquad 2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12\Delta_2.$$

Alors, choisissons $l \leqq \alpha^{2-\zeta}$, où ζ fini et > 0, d'où $k_1 < \frac{2}{7} l^2 \leqq \frac{2}{7}\alpha^{4-2\zeta}$, d'après (27), et remplaçons dans (34) et (35) α' par sa valeur (31); Δ_1 est au plus égal à un polynome de degré inférieur à 5 (à 4, si $a = 0$), et Δ_2 est au moins égal à un polynome de degré 5 (4, si $a = 0$), en α. On en conclut sans peine, par un raisonnement déjà employé, que les intervalles (35) obtenus en donnant à α toutes les valeurs, paires ou impaires suivant les cas, sont contigus dès que α est supérieur à une certaine limite et le théorème I se trouve ainsi établi (sauf en ce qui concerne le nombre des nombres $\varphi(x)$ nécessaires quand $a = 0$).

On voit encore que le nombre des décompositions augmente indéfiniment avec le nombre à décomposer, et l'on peut même, dans des limites très étendues, choisir arbitrairement l et k_1.

Dans le cas où $\varphi(x)$ est du quatrième degré, c'est-à-dire quand $a = 0$, on peut encore réduire de moitié le nombre des fonctions $\varphi(x)$ nécessaires.

On pourrait être tenté d'appliquer la même méthode au cas où $\varphi(x)$ est de degré $\leqq 3$; mais alors la considération des intervalles (32) deviendrait illusoire.

Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé [1];

Par M. Maurice HAMY.

Dans un Mémoire précédent [2], j'ai montré qu'en supposant petite l'inclinaison relative des plans des orbites de deux planètes P, P_1, le développement trigonométrique de la partie principale de la fonction perturbatrice, effectué par rapport aux anomalies moyennes, se ramène à celui de

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f(E^{iu}) f_1(E^{iu_1})}{\Delta^s},$$

E désignant la base des logarithmes népériens; i le symbole $\sqrt{-1}$; ζ et ζ_1 les anomalies moyennes de P, P_1; u et u_1 les anomalies excentriques; $f(E^{iu})$ une fonction réelle entière de $\sin u$ et $\cos u$; $f_1(E^{iu_1})$ une fonction réelle entière de $\sin u_1$ et $\cos u_1$; s un nombre peu élevé de la forme $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$; Δ l'expression du carré de la distance des planètes dans laquelle on ne tient pas compte de l'inclinaison des orbites.

---

(1) La bibliographie du sujet est très complètement exposée dans la Thèse de M. Coculesco : *Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1895).

(2) Hamy, *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1894).

J'ai donné les expressions approchées des coefficients de

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(m\zeta + m_1\zeta_1),$$

dans le développement de F_0, lorsque m et m_1 sont de grands nombres, sans faire d'hypothèse sur la valeur de l'excentricité de la planète P ni sur celle du rapport $\frac{m}{m_1}$, dans le cas où l'orbite de la planète P_1 est circulaire et enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite elliptique de la planète P.

Je me propose, dans le présent Mémoire, de résoudre le problème inverse ; c'est-à-dire de trouver les expressions approchées des termes éloignés du développement de F_0, lorsque l'orbite elliptique de la planète P enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite circulaire de la planète P_1 [1].

J'arrive au résultat par des considérations analogues à celles qui m'ont guidé dans mes recherches antérieures. Je renvoie plus d'une fois le lecteur à ces recherches, pour éviter des redites, notamment au sujet de l'application de la méthode de M. Darboux, relative à l'approximation des fonctions de grands nombres [2] et au sujet de la détermination de certaines intégrales analogues à celles que M. Poincaré a rencontrées dans ses savantes recherches sur le développement approché de la fonction perturbatrice [3].

Je termine en résumant les opérations à exécuter dans les applications numériques.

Quelques remarques très simples concernant l'intégrale

$$I = \int f(z)\varphi^n(z)\,dz,$$

prise le long d'un contour C, le long duquel les fonctions f et φ sont

---

(1) *Voir* sur ce sujet une Note de M. Ferraud (*Comptes rendus*, 20 avril 1896). *Voir* aussi Hamy (*Comptes rendus*, 4 mai 1896).

(2) Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 1878).

(3) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I.

finies, et où n désigne un grand nombre positif, faciliteront l'exposition des présentes recherches.

Désignons par ξ l'affixe du point de contour C, où $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur, le long de ce contour, et par ζ une autre valeur de z telle que $|\varphi(\zeta)| > |\varphi(\xi)|$. Je dis que le produit $\frac{n^q 1}{\varphi^n(\zeta)}$, où q désigne un nombre fini arbitraire, tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Il suffit évidemment de démontrer la proposition en supposant q positif et entier.

Le développement

$$\frac{1}{1 - t\varphi(z)} = \sum t^n \varphi^n(z)$$

est convergent pour les valeurs de t dont le module est inférieur à $\frac{1}{\varphi(\xi)}$, si z désigne l'affixe d'un point quelconque pris sur le contour C. On peut donc écrire

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{1 - t\varphi(z)} = \sum t^n \int_C f(z)\varphi^n(z)\,dz,$$

et la série écrite dans le second membre converge pour les valeurs de t de module inférieur à $\frac{1}{|\varphi(\xi)|}$, ainsi que toutes ses dérivées par rapport à t. La valeur $t = \frac{1}{\varphi(\zeta)}$ étant intérieure au cercle de convergence, le terme général de la dérivée d'ordre q tend vers zéro pour $t = \frac{1}{\varphi(\zeta)}$.

Le produit

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)1}{\varphi^n(\zeta)},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{n^q 1}{\varphi^n(\zeta)}(1 + \varepsilon),$$

en appelant ε un infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n}$, tend donc vers zéro lorsque n croît indéfiniment. C. Q. F. D.

Corollaire. Si l'on considère la somme

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \ldots)\varphi^n(\zeta) + 1,$$

dans laquelle les A et les p sont des quantités fixes en nombre fini, on a asymptotiquement

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta).$$

Effectivement, on a

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta)\left[1 + \frac{1}{A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots}\,\frac{1}{\varphi^n(\zeta)}\right]$$

et la fraction entre crochets tendant manifestement vers zéro, d'après ce qui précède, on peut écrire

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)(1 + \varepsilon). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Voici encore une remarque qui se rattache à ce qui précède :

Si l'on considère la somme

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta) + (B_1 n^{q_1} + B_2 n^{q_2} + \dots)\varphi^n(\xi),$$

dans laquelle les A, les p, les B, les q sont des quantités fixes en nombre fini, on a asymptotiquement

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta)$$

si $|\varphi(\zeta)| > |\varphi(\xi)|$.

Effectivement, on a

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta)\left\{1 + \frac{B_1 n^{q_1} + B_2 n^{q_2} + \dots}{A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots}\left[\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\zeta)}\right]^n\right\}.$$

La fraction entre crochets tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment, puisque $\left|\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\zeta)}\right| < 1$, on peut écrire

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots)\varphi^n(\zeta)(1 + \varepsilon). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

I.

1. Étant donnée une fonction réelle $F_0(\zeta_1, \zeta)$, de période 2π par rapport à chacune des variables ζ_1, ζ, on peut la développer sous la forme suivante, en appelant $B_{p_1,p}$ et $C_{p_1,p}$ des coefficients constants,

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_{p} B_{p_1,p} \cos(p_1\zeta_1 + p\zeta) + \sum_{p_1} \sum_{p} C_{p_1,p} \sin(p_1\zeta_1 + p\zeta);$$

l'un des entiers p_1, p recevant des valeurs toutes de même signe, l'autre variant entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si l'on remplace les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles imaginaires, il vient, en désignant par E la base des logarithmes népériens et i le symbole $\sqrt{-1}$,

$$(1) \qquad F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_{p} A_{p_1,p} E^{i(p_1\zeta_1 + p\zeta)},$$

les entiers p, p_1 prenant maintenant toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, à condition de poser

$$B_{p_1,p} - iC_{p_1,p} = 2A_{p_1,p},$$
$$B_{p_1,p} + iC_{p_1,p} = 2A_{-p_1,-p}.$$

Si donc on développe $F_0(\zeta_1, \zeta)$ sous la forme (1), le double de la partie réelle de $A_{p_1,p}$ donne le coefficient $B_{p_1,p}$ et le double du coefficient de $-i$ dans $A_{p_1,p}$ donne le coefficient $C_{p_1,p}$.

En particulier, pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos du présent travail il faut calculer $A_{m_1,m}$.

Nous supposerons désormais que le multiplicateur m_1 de ζ_1, dans $\frac{\cos}{\sin}(m_1\zeta_1 + m\zeta)$, est positif, m pouvant être positif ou négatif.

Dans le problème qui doit nous occuper ζ et ζ_1 sont les anomalies moyennes des deux planètes P, P_1.

2. *Expression de* $X_{m_1, m}$. — Appelons a_1 et ζ_1 le rayon vecteur et l'anomalie de la planète P_1 qui décrit l'orbite circulaire.

Désignons par r et a le rayon vecteur et le demi grand axe de l'orbite de la planète P qui décrit l'orbite elliptique; par $e = \sin\psi$ son excentricité; par ζ, u, w son anomalie moyenne, son anomalie excentrique et son anomalie vraie.

Posons

$$(2) \qquad z = E^{iu}, \qquad t = E^{i\zeta}.$$

L'équation de Képler donne

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} t &= z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, \\ \frac{1}{t}\frac{dt}{dz} &= -\frac{\sin\psi}{2z^2}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Les formules connues du mouvement elliptique, qui expriment le rayon vecteur et l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique [1], se transforment, d'autre part, en

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} rE^{iw} &= \frac{a\cos^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2, \\ rE^{-iw} &= \frac{a\sin^2\frac{\psi}{2}}{z}\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2, \\ r &= -\frac{a\sin\psi}{2z}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Ces expressions seront bientôt utilisées.

Faisons

$$(5) \qquad \frac{m}{m_1} = \theta, \qquad E^{i\zeta_1} = t^{-\theta}x, \qquad F(x, z) = \frac{1}{t}\frac{dt}{dz}F_0(\zeta_1, \zeta) - \frac{r}{az}F_0(\zeta_1, \zeta),$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} J(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|x|=1}\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}\,dx, \\ I &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=1} J(z)\,dz; \end{aligned} \right.$$

---

(1) Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, p. 101 et 103.

les intégrales étant prises, la première le long de la circonférence $|x| = 1$, la seconde le long de la circonférence $|z| = 1$. Je dis que I a pour valeur la quantité $A_{m_1, m}$ définie plus haut.

En effet, si l'on introduit les notations (2) et (5) dans l'expression (1) de $F_0(\zeta_1, \zeta)$, on a

$$(7) \qquad F(x, z) = \sum_{p_1} \sum_{p} A_{p_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta p_1 - 1} x^{p_1}.$$

Il en résulte

$$J(z) = \sum_{p_1} \sum_{p} A_{p_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta p_1 - 1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} x^{p_1 - m_1} \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale étant nulle tant que $p_1 \gtrless m_1$ et étant égale à $2i\pi$ pour $p_1 = m_1$, cette équation se réduit à

$$(8) \qquad J(z) = \sum_{p} A_{m_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta m_1 - 1},$$

ou, en remarquant d'après la première formule (5) que $\theta m_1 = m$,

$$(9) \qquad J(z) = \sum_{p} A_{m_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-m-1}.$$

L'expression (6) de I peut être mise sous une autre forme en changeant de variable d'intégration et prenant t comme variable nouvelle.

Aux valeurs réelles de ζ correspondent pour u des valeurs réelles; il en résulte (2) que $|t| = 1$ lorsque $|z| = 1$. De plus, l'anomalie ζ croissant de 2π lorsque l'anomalie u croît de 2π, la variable t décrit en entier, et une seule fois, la circonférence $|t| = 1$ lorsque la variable z décrit en entier, et une seule fois, la circonférence $|z| = 1$.

Le nouveau chemin d'intégration est donc la circonférence $|t| = 1$, et l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} J(z) \frac{dz}{dt} dt.$$

Remplaçant $J(z)$ par son expression (9) dans cette équation, il vient

$$I = \sum_p A_{m_1,p} \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} t^{p-m} \frac{dt}{t}.$$

L'intégrale étant nulle tant que $p \gtrless m$ et ayant pour valeur $2i\pi$ pour $p = m$, on a

$$I = A_{m_1,m}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'évaluation de $A_{m_1,m}$ est ainsi ramenée au calcul des intégrales (6). Voici quelques remarques destinées à faciliter cette recherche.

5. L'expression (9) de $J(z)$, dans laquelle t et $\frac{dt}{dz}$ doivent être remplacés par leurs valeurs (3) en fonction de z, est valable lorsque les anomalies u et ζ sont réelles, c'est-à-dire, d'après (2), lorsque $|z| = 1$. Or, d'après les formules (3), le produit

$$\frac{dt}{dz} t^{p-m-1}$$

est une fonction uniforme de z, puisque p et m sont des entiers. L'expression (9) de $J(z)$ montre donc que cette fonction reprend sa valeur lorsque la variable z, après avoir décrit en entier la circonférence $|z| = 1$, revient au point de départ. Pour calculer l'intégrale I, mise sous la forme (6), on pourra donc déformer arbitrairement le contour d'intégration $|z| = 1$, à la condition d'éviter de rencontrer les singularités de $J(z)$.

$J(z)$ est indépendant de la détermination adoptée pour le facteur $t^{-\theta}$ qui entre dans les formules (5) et dans l'expression (7) de $F(x, z)$. On en voit la raison en examinant de près la formule (8) où le facteur $t^{-\theta}$ se trouve élevé à la puissance m_1. Afin de fixer les idées, nous pouvons convenir de choisir la détermination de $t^{-\theta}$ qui a pour valeur 1 lorsque l'on part, dans le plan de la variable z, du point $z = 1$.

D'après la formule (7), le développement de $F(x, z)$, qui est valable pour $|z| = 1$ et $|x| = 1$, ne contient que des puissances entières de x. La fonction $F(x, z)$ reprend donc sa valeur lorsque, z ayant une va-

leur de module égale à 1, le point x, après avoir parcouru en entier la circonférence $|x| = 1$, revient au point de départ.

Reportons-nous maintenant à l'expression (6) de $J(z)$.

La fonction $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, que nous aurons à considérer pour résoudre le problème posé dans l'avant-propos du présent travail, possède, comme on le verra bientôt, en tant que fonction de x, des points singuliers dont les affixes sont des fonctions continues de z.

Ces points sont d'ailleurs d'une nature telle que si la variable x tourne de 2π, autour de l'un quelconque d'entre eux, l'argument de la fonction varie d'une quantité indépendante de z.

Cela étant, faisons varier z d'une façon continue en partant d'une valeur de module égal à 1. Les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x, vont alors se déplacer d'une façon continue.

Admettons que l'on évite de donner à z les valeurs pour lesquelles se confondent deux de ces points singuliers, l'un extérieur, l'autre intérieur à la circonférence $|x| = 1$ lorsque z a pour module l'unité. Ces valeurs sont, comme on sait, les points singuliers de la fonction $J(z)$ [1]. On peut alors, à tout instant, remplacer la circonférence $|x| = 1$, le long de laquelle est prise l'intégrale $J(z)$ pour $|z| = 1$, par un autre contour S obtenu en faisant fuir certaines parties de la circonférence $|x| = 1$ devant les points singuliers mobiles de la fonction $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$ qui seraient sur le point de la franchir. Le contour S renferme ainsi, à tout instant, les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$ qui étaient au début à l'intérieur de la circonférence $|x| = 1$, et aucun de ceux qui se trouvaient à l'extérieur de cette circonférence. La variation de l'argument de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, lorsque la variable x décrit en entier, et une seule fois le contour mobile S, est donc un multiple de 2π comme lorsque, $|z|$ étant égal à 1, la variable x décrit la circonférence $|x| = 1$ en entier et une seule fois. Il résulte de là que le contour S

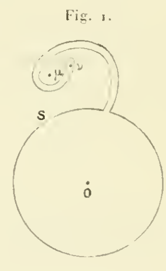
---

(1) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

peut être déformé arbitrairement, sans être astreint à avoir un point de commun avec le chemin d'intégration primitif $|x| = 1$, pourvu que l'on évite de faire traverser à ce contour S les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$.

Il peut se produire, lorsque z varie d'une façon continue, la circonstance particulière que voici. Considérons deux points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, $x = \mu$ et $x = \nu$; le premier extérieur, le second intérieur à la circonférence $|x| = 1$ pour $|z| = 1$. La succession des valeurs données à z peut être telle que le point ν tourne d'un angle supérieur à 2π, dans son mouvement relatif autour du point μ; le contour S affecte alors la forme indiquée (*fig.* 1), le nombre des spires de l'enroulement

Fig. 1.

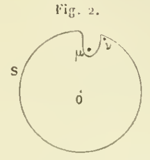


du contour autour du point μ dépendant du nombre de fois que le point ν a tourné autour du point μ.

Dans les présentes recherches, cette circonstance ne se produira pas. Nous établirons que, pour les valeurs de z qu'il y a lieu de considérer, le mouvement du point ν autour du point μ est tel que l'angle $\nu\mu O$ ne dépasse pas π en valeur absolue, O étant l'origine des coordonnées. La fonction $F(x, z)$ que nous rencontrerons n'ayant, en plus de l'origine, qu'un seul point singulier $x = \nu$ intérieur au contour S et, à l'extérieur, qu'un seul point singulier $x = \mu$, en plus de $x = \infty$, on pourra déformer ce contour, comme il est indiqué *fig.* 2, de telle sorte : 1° que tous les points de ce chemin soient plus éloignés de l'origine que le point μ, sauf dans le voisinage de ce point; 2° que

le segment de droite μO rencontre le contour en un point unique. Un

Fig. 2.



contour de cette nature est ce que j'ai appelé un *contour de première espèce* par rapport au point μ (¹).

II.

4. L'orbite de la planète P_1 étant circulaire, le périhélie de cette planète est indéterminé. On peut donc supposer que le périhélie de la planète P_1 et celui de la planète P ont même longitude.

En se reportant aux notations du n° **2**, le carré de la distance des deux planètes a ainsi pour valeur

$$\Delta = a_1^2 + r^2 - 2a_1 r(\cos\zeta_1 \cos w + \sin\zeta_1 \sin w).$$

r, w, u étant supposés exprimés en fonction de ζ, faisons, en nous reportant à l'avant-propos de ce Mémoire,

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f_1(E^{i\zeta_1}) f(E^{iu})}{\Delta^s}.$$

On en déduit, d'après les formules (5),

$$(10) \quad F(x, z) = \left[\frac{x}{-a_1 r E^{-iw} t^{-\theta} x^2 + (a_1^2 + r^2) x - a_1 r E^{iw} t^{\theta}}\right]^s \frac{r}{az} f_1(t^{-\theta} x) f(z),$$

t, r, w étant des fonctions de z définies par les formules (3) et (4).

(¹) HAMY, *loc. cit.*, p. 393 et 394.

Posons, en tenant compte de ces formules :

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a_1}{a} < 1, \\ t^{-\theta}\mu = \dfrac{r}{a_1}E^{\varpi} = \dfrac{\cos^2\frac{\psi}{2}}{\alpha z}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2, \\ \mu = t^{\theta}\dfrac{r}{a_1}E^{\varpi} = \dfrac{1}{\varphi(z)}, \\ \nu = \dfrac{a_1^2}{r^2}\mu = \dfrac{a_1^2}{r^2}\,\dfrac{1}{\varphi(z)}, \\ \varphi(z) = \dfrac{\alpha z}{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[zE^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta}. \end{cases}$$

La détermination du facteur

$$(11')\qquad t^{-\theta} = \left[zE^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta},$$

qui rentre dans ces formules, est celle qui a pour valeur 1 lorsque l'on part, dans le plan de la variable z, du point $z = 1$ (n° **3**). La fonction $\varphi(z)$ prend donc des valeurs réelles et positives lorsque z, partant du point $z = 1$, parcourt la partie positive de l'axe des abscisses. Lorsque z chemine le long de la partie négative de l'axe des abscisses, $\varphi(z)$ n'est plus réelle, en général, mais son argument conserve la même valeur quelle que soit la position de la variable sur cette partie de l'axe des abscisses.

En introduisant les notations (11) dans l'expression (10) de $F(x, z)$, cette fonction prend la forme

$$(12)\qquad F(x, z) = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s \frac{r}{az} f_1(t^{-\theta}x) f(z),$$

le facteur élevé à la puissance s représentant l'expression de $\frac{1}{\Delta^s}$, où Δ est le carré de la distance des planètes.

Pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos de ce Mémoire, nous avons donc, comme on l'a vu au n° **2**, à calculer la

quantité I définie par

$$(13)\qquad \begin{cases} J(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{|x|=1} \dfrac{F(x,z)}{x^{m_1+1}}\,dx, \\ I \;\;= \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{|z|=1} J(z)\,dz. \end{cases}$$

3. *Points singuliers de la fonction* J(z). — L'orbite de la planète P_1 étant intérieure à l'orbite de la planète P, le rapport $\frac{a_1}{r}$ est inférieur à 1 lorsque $|z| = 1$, c'est-à-dire lorsque les anomalies ζ, u, w sont réelles. Il en résulte (11) que l'on a, puisque le module de t (2) est alors égal à 1,

$$|\mu| > 1 \quad \text{et} \quad |\nu| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Cela étant, les points singuliers de $\frac{F(x,z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x, sont, pour $|z| = 1$: 1° les points $x = \mu$ et $x = \infty$, à l'extérieur de la circonférence $|x| = 1$; 2° les points $x = \nu$ et $x = 0$, à l'intérieur de la circonférence $|x| = 1$. Il n'y en a pas d'autres, puisque $f_1(t^{-\theta}x)$ est un polynome en $t^{-\theta}x$ et $\frac{1}{t^{-\theta}x}$.

Les points singuliers de la fonction J(z) sont de deux sortes :

Cette fonction admet : 1° les points singuliers des fonctions de z qui font partie de F(x, z) (12), savoir :

Les valeurs de z pour lesquelles $\nu = 0$;
Les valeurs de z pour lesquelles $\mu = \infty$;
Les valeurs de z pour lesquelles $\frac{r}{z} = \infty$;
Les valeurs de z pour lesquelles $t^{-\theta}$ s'annule, devient infini, ou change de détermination dans le polynome $f_1(t^{-\theta}x)$, en $t^{-\theta}x$ et $\frac{1}{t^{-\theta}x}$;
Les valeurs de z pour lesquelles le polynome $f(z)$ en z et $\frac{1}{z}$ devient infini.

On voit sans peine, en partant de la dernière des formules (4) et des

formules (11) et (11'), qu'il n'y a pas, dans cette catégorie, de points singuliers autres que $z=0$, $z=\infty$.

2° La fonction $J(z)$ a encore comme points singuliers les valeurs de z pour lesquelles deux points singuliers de $\frac{F(x,z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x, séparés par le contour d'intégration lorsque $|z|=1$, se rencontrent. Ce sont donc les valeurs de z pour lesquelles

$$\mu=0, \qquad \nu=\infty, \qquad \mu-\nu=0.$$

On a, d'après les formules (11) et (4) :

$$\mu = \frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z-\text{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z}\left[z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\right]^0,$$

$$\nu = \frac{\alpha z}{\sin^2\frac{\psi}{2}\left(z-\cot\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\right]^0,$$

$$\mu-\nu = \frac{\nu}{a_1^2}(r^2-a_1^2).$$

L'équation $\mu=0$ est vérifiée par $z=0$ ou $z=\infty$ et par la racine double $z=\text{tang}\frac{\psi}{2}$.

L'équation $\nu=\infty$ est vérifiée par $z=0$ ou $z=\infty$ et par la racine double $z=\cot\frac{\psi}{2}$.

L'équation $\mu-\nu=0$ est vérifiée : 1° par les valeurs de z pour lesquelles $\nu=0$, savoir $z=0$ ou $z=\infty$; 2° par les solutions de l'équation $r^2-a_1^2=0$. On a (4)

$$(14)\quad \begin{cases} r-a_1 = -\dfrac{a}{2z}\left[\sin\psi\left(z-\text{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z-\cot\dfrac{\psi}{2}\right)+2\alpha z\right], \\ r+a_1 = -\dfrac{a}{2z}\left[\sin\psi\left(z-\text{tang}\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z-\cot\dfrac{\psi}{2}\right)-2\alpha z\right]. \end{cases}$$

On voit donc que l'équation $r^2-a_1^2=0$ équivaut à

$$(15)\quad \begin{cases} \sin\psi\, z^2-2(1-\alpha)z+\sin\psi=0, & \text{pour } r=a_1, \\ \sin\psi\, z^2-2(1+\alpha)z+\sin\psi=0, & \text{pour } r=-a_1. \end{cases}$$

En résumé, les points singuliers de la fonction $J(z)$ sont $z = 0$, $z = \infty$, les points doubles $\left(z - \tang\frac{\psi}{2}\right)^2 = 0$, $\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 = 0$, et les racines des équations (15).

Les orbites des deux planètes P, P_1 ne se coupant pas, les équations (15) ont leurs racines réelles et positives, comme on s'en rend compte aisément en se rappelant que $\sin\psi$ représente l'excentricité de la planète P. Appelons z_1 la plus grande racine de la première équation (15), $z_2 = \frac{1}{z_1}$ la plus petite; z'_1 la plus grande racine de la seconde équation (15), $z'_2 = \frac{1}{z'_1}$ la plus petite. Il est facile de vérifier que les racines z_2 et z_1 sont comprises entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$, et que les racines z'_2 et z'_1 comprennent au contraire $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$. Ces différentes

Fig. 3.

valeurs de z occupent donc, sur l'axe des abscisses, dans le plan de la variable z, la position indiquée *fig.* 3, O étant l'origine des coordonnées.

6. Les formules (14), auxquelles nous adjoindrons la valeur (4) de r, peuvent s'écrire, en mettant en évidence les racines qui viennent d'être définies,

$$
(16) \qquad \begin{cases}
r - a_1 = -\dfrac{a\sin\psi}{2z}(z - z_2)(z - z_1), \\
r + a_1 = -\dfrac{a\sin\psi}{2z}(z - z'_2)(z - z'_1), \\
\quad\; r \;\;\; = -\dfrac{a\sin\psi}{2z}\left(z - \tang\dfrac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\dfrac{\psi}{2}\right).
\end{cases}
$$

Le rapport $\frac{a_1}{r}$ est réel, positif et inférieur à 1 pour les valeurs de z dont le module est égal à 1, car l'anomalie excentrique de la planète P étant alors réelle (2), son rayon vecteur est réel et supérieur à a_1 par hypothèse. La première formule (16) montre que ce rapport jouit de la

même propriété pour toutes les valeurs réelles négatives de z et pour les valeurs réelles positives de z comprises entre z_1 et z_2.

On tire des formules (16)

$$\frac{r - a_1}{r} = \frac{(z - z_2)(z - z_1)}{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)}.$$

Il en résulte que le rapport $\frac{r - a_1}{r}$ est réel et négatif :

1° Pour les valeurs réelles de z comprises entre $\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$ et z_2 ;

2° Pour celles comprises entre z_1 et $\cot\frac{\psi}{2}$.

Le rapport $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ est réel et positif pour les valeurs de z, dont le module est égal à 1, car l'anomalie excentrique de la planète P étant alors réelle (2), son rayon vecteur est réel et supérieur à a_1 par hypothèse. Ce rapport est encore réel et positif pour les valeurs réelles de z inférieures à z'_2, pour les valeurs réelles de z comprises entre z_2 et z_1, pour les valeurs réelles de z supérieures à z'_1, ainsi qu'il résulte de l'expression, tirée des formules (16),

$$\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} = \frac{(z - z'_2)(z - z_2)(z - z_1)(z - z'_1)}{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}.$$

Cela étant, considérons, dans le plan de la variable z, un contour qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2. Cherchons comment varie l'argument Ω de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$, lorsque la variable z chemine le long de ce contour.

Soit A la position de la variable sur le contour (*fig.* 4); l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$, qui se réduit à zéro au point M, a pour valeur

$$\Omega = \omega'_2 + \omega_2 + \omega_1 + \omega'_1 - 2\omega - 2\omega'.$$

Or, on a les relations suivantes, entre les angles marqués sur la

figure :

$$\omega'_2 - \omega = -\eta'_2,$$
$$\omega_2 - \omega = \eta_2,$$
$$\omega_1 - \omega' = -\eta_1,$$
$$\omega'_1 - \omega' = \eta'_1.$$

Fig. 4.

On trouve, en faisant la somme de ces égalités

$$\Omega = -\eta'_2 + \eta_2 - \eta_1 + \eta'_1.$$

L'angle A du triangle $z'_2 A z'_1$, qui est supérieur à $\eta'_2 + \eta_2 + \eta_1 + \eta'_1$, ne pouvant dépasser π, on a

(17) $$|\Omega| < \pi.$$

La démonstration serait analogue si le point A était pris au-dessous de l'axe des abscisses.

Cette inégalité, à laquelle nous aurons recours plus d'une fois, montre que l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ varie d'une quantité inférieure à π, en valeur absolue, lorsque la variable z suit un chemin quelconque assujetti à ne rencontrer la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2.

Remarque. — L'intégrale I (13) est prise le long de la circonférence $|z| = 1$. Ce contour peut être déformé arbitrairement (nº 5), pourvu que l'on évite de lui faire traverser les points singuliers de la

fonction $J(z)$. On peut, en particulier, faire subir à la circonférence $|z| = 1$ une déformation continue, de façon à l'amener à coïncider avec un chemin fermé quelconque, tel que celui qui est représenté (*fig.* 4), assujetti à rencontrer la partie positive de l'axe des abscisses en un point unique M compris entre les points z_1, z_2 et la partie négative du même axe en un point arbitraire.

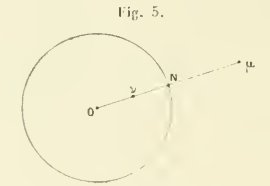
7. *Position relative des points μ et ν dans le plan de la variable x.* — Nous avons trouvé (11) les formules

$$\mu = \frac{1}{\varphi(z)}, \qquad \nu = \frac{a_1^2}{r^2}\mu.$$

Supposons : 1° que z est un point de la circonférence $|z| = 1$.

$\frac{a_1^2}{r^2}$ est alors une quantité réelle positive inférieure à 1 (n° 6); on a vu d'ailleurs que le point ν est intérieur et μ extérieur à la circonfé-

Fig. 5.



rence $|x| = 1$ (n° 5). Ces points sont donc en ligne droite avec l'origine et occupent, par rapport à l'origine et la circonférence $|x| = 1$, une position telle que le montre la *fig.* 5.

Considérons, dans ces conditions, le facteur

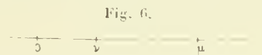
$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s$$

qui entre dans la fonction $F(x, z)$ (12) et qui représente, lorsque $|z| = 1$ et $|x| = 1$, l'inverse de la distance des planètes PP_1 élevée à la puissance $2s$. Remplaçons, dans $\frac{1}{\Delta^s}$, x par l'affixe d'un point quelconque du segment $\mu\nu$. L'argument de x, celui de $x - \mu$ et celui de

$x - \nu$ conservant la même valeur, quelle que soit la position du point x sur ce segment, l'argument de $\frac{1}{\Delta^s}$ est lui-même invariable, lorsque x suit ce chemin. Il en résulte que $\frac{1}{\Delta^s}$ a une valeur réelle et positive, quelle que soit la position du point x sur le segment $\mu\nu$, puisque $\frac{1}{\Delta^s}$ jouit de cette propriété au point particulier N situé à la rencontre de la circonférence $|x| = 1$ et de $\mu\nu$.

Supposons : 2° *que z est un point du segment $z_1 z_2$ de l'axe des abscisses* (*fig.* 4). — On a vu (n° 4) que $\varphi(z)$ est alors réel et positif et que $\frac{a_1^2}{r^2}$ est réel, positif et inférieur à 1 (n° 6). Les points μ et ν occupent donc, dans le plan de la variable x, la position indiquée (*fig.* 6), sur la partie positive de l'axe des abscisses.

Fig. 6.



Cela étant, on voit, comme précédemment, que $\frac{1}{\Delta^s}$ a le même argument pour tout point x situé sur le segment $\mu\nu$. D'autre part, si l'on fait varier z dans son plan, sur le segment $z_1 z_2$ de l'axe des abscisses (*fig.* 4), les points μ et ν se déplacent, dans le plan des x, sur l'axe des abscisses et ne se rencontrent pas si l'on évite de donner à z les valeurs z_1 et z_2 (n° 5). On voit donc que $\frac{1}{\Delta^s}$ conserve le même argument, lorsque le point x se déplace sur le segment $\mu\nu$, et le point z sur le segment $z_1 z_2$. Or $\frac{1}{\Delta^s}$ est réel et positif, comme on l'a vu ci-dessus, lorsque l'on donne à z la valeur particulière 1, qui fait partie du segment $z_1 z_2$; $\frac{1}{\Delta^s}$ jouit donc de cette propriété, quelle que soit la position du point z sur le segment $z_1 z_2$ et la position du point x sur le segment $\mu\nu$.

Supposons : 3° *que z, partant d'un point de la circonférence $|z| = 1$, suive un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1, z_2* (*fig.* 4). On a

identiquement

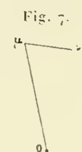
$$\nu - \mu = -\mu \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}.$$

Il en résulte, à un multiple de 2π près, entre les arguments de deux membres,

$$\arg(\nu - \mu) = \arg(-\mu) + \arg \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}.$$

Figurons (*fig.* 7), dans le plan de la variable x, le point μ et l'origine des coordonnées O.

Fig. 7.



La demi-droite, issue du point μ et faisant avec l'axe des abscisses un angle égal à $\arg(-\mu)$, n'est autre que μO. Il faut donc, pour rencontrer le point ν, en partant du point μ, partir dans une direction $\mu\nu$ telle que l'angle $\nu\mu$O soit égal à $\arg \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$.

$\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ étant réel et positif, lorsque z est un point de la circonférence $|z| = 1$ (n° 6), le point ν est alors situé sur μO, comme on l'a déjà vu il y a un moment. Or, l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ varie d'une quantité inférieure à π en valeur absolue, lorsque z suit un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2 (n° 6); l'angle $\nu\mu$O est donc inférieur à π en valeur absolue.

Ainsi se trouve établi un résultat dont nous avons déjà parlé au n° 5. Il en résulte que l'on peut, pour toute valeur de z située le long d'un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2, prendre l'intégrale J(z) (13) le long d'un contour de première espèce par rapport au point μ, tracé dans le plan de la variable x, comme on l'a déjà expliqué à la fin du n° 5.

8. *Application de la méthode de M. Darboux à* J(z). — En vertu

de ce qui précède, en posant (12)

$$\mathrm{F}(x, z) = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s \frac{r}{az} f_1(t^{-\theta}x) f(z)$$

l'intégrale suivante, prise le long d'un contour de première espèce, par rapport au point μ, parcouru dans le sens direct pour un observateur placé à l'origine, a pour valeur $\mathrm{J}(z)$:

$$\mathrm{J}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \mathrm{F}(x, z)\frac{dx}{x^{m_1+1}}.$$

La considération du point $x = \mu$ permet donc d'obtenir une expression de $\mathrm{J}(z)$ en appliquant la méthode de M. Darboux [1]. Il faut, à cet effet, former le développement de la fonction $\mathrm{F}(x, z)$ dans le voisinage du point μ.

Le facteur $f_1(t^{-\theta}x)$ étant un polynome en x et $\frac{1}{x}$, ce facteur est holomorphe dans le voisinage du point μ et l'on peut écrire

$$(18) \quad f_1(t^{-\theta}x) = f_1(t^{-\theta}\mu)\left[1 + \left(1 - \frac{x}{\mu}\right) \times \text{fonct.holom.de}\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)\right].$$

Pour développer le facteur

$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x-\mu)(x-\nu)}\right]^s,$$

il convient de poser

$$1 - \frac{x}{\mu} = \xi,$$

et de développer $\frac{1}{\Delta^s}$ suivant les puissances de ξ. On a, en remplaçant $a_1^2\frac{\mu-\nu}{\nu}$ par sa valeur $r^2 - a_1^2$, tirée des formules (11) :

$$(19) \qquad \frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{1-\xi}{(r^2 - a_1^2)\,\xi\left(1 - \frac{\mu}{\mu-\nu}\xi\right)}\right]^s$$

---

[1] HAMY, *loc. cit.*, p. 394.

ou, en développant et remplaçant ξ par $1-\frac{x}{\mu}$,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Delta^s} &= r^{-2s}\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s} \\ &\times\left[1+\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\times \text{fonction holomorphe de } \left(1-\frac{x}{\mu}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

r est une fonction uniforme de z (4) et $2s$ un entier; le facteur r^{-2s} a donc un sens parfaitement défini pour toute valeur de z. Il n'en est pas de même pour le facteur $\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$ qui a deux déterminations. Afin de choisir entre ces deux déterminations, donnons à x une valeur x' infiniment voisine de μ, figurée, dans le plan de la variable x, sur la droite qui joint le point μ à l'origine, entre ces deux points. $1-\frac{x'}{\mu}$ a une valeur réelle positive, ainsi que l'une des déterminations de $\left(1-\frac{x'}{\mu}\right)^{-s}$. Convenons d'adopter, dans le développement de $\frac{1}{\Delta^s}$, la détermination particulière de $\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s}$, qui est réelle et positive pour $x=x'$. Il est alors aisé de bien fixer le sens du facteur $\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$.

Supposons d'abord que l'on donne à z une valeur de module égal à 1; $\frac{1}{\Delta^s}$ a alors une valeur réelle positive pour $x=x'$ (n° **7**, 1°); le crochet qui est en facteur dans le second membre de la formule (19) se réduit à 1, puisque $1-\frac{x'}{\mu}$ est infiniment petit; $\left(1-\frac{x'}{\mu}\right)^{-s}$ est réel et positif ainsi que r^{-2s} (n° **6**). Il en résulte que $\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$ est réel et positif. La détermination du facteur $\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$, qui rentre dans le développement (19), est donc celle dont l'argument est nul pour $|z|=1$.

Faisons maintenant varier z d'une façon continue, en partant d'une valeur de module égal à 1, et en suivant un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses des z qu'entre les points z_1, z_2 (*fig.* 4). L'argument de $\frac{r^2-a_1^2}{r^2}$ varie alors d'une quantité inférieure à π en valeur absolue (n° **6**). On voit ainsi que la détermination de

$\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$, qui figure dans le développement (19), est celle dont l'argument s'obtient en multipliant par $-s$ l'argument de $\frac{r^2-a_1^2}{r^2}$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On tire maintenant des formules (18) et (19)$'$:

$$F(x, z) = \frac{r^{1-2s}}{az} f_1(t^{-0}\mu) f(z) \left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s} \left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s}$$
$$\times\left[1+\left(1-\frac{x}{\mu}\right)\times \text{fonction holomorphe de } \left(1-\frac{x}{\mu}\right)\right].$$

La détermination adoptée pour le facteur $\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s}$ étant celle qui est positive et réelle lorsque x est l'affixe d'un point du segment de droite qui joint le point μ à l'origine, on a, d'après la méthode de M. Darboux ([1]),

$$J(z) = \frac{r^{1-2s}}{az} f_1(t^{-0}\mu) f(z) \left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$$
$$\times\left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans le développement de } \left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s}\right.$$
$$\left. + \text{ un terme de l'ordre de } \frac{m_1^{s-2}}{\mu^{m_1}}\right].$$

En remplaçant μ et $t^{-0}\mu$ par leurs valeurs (11) et posant, après avoir développé la factorielle qui fait partie du coefficient de x^{m_1}, dans le développement de $\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-s}$, suivant les puissances descendantes de m_1 ([2]),

$$(20) \qquad \Psi(z) = \frac{r^{1-2s}}{az}\,\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s} f(z) f_1\left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z-\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z}\right],$$

on peut écrire

$$(21) \qquad J(z) = \frac{1}{m_1^{1-s}}\Psi(z)\,\varphi^{m_1}(z)\left(1+\frac{R}{m_1}\right),$$

([1]) HAMY, *loc. cit.*, p. 396 et 397 (remarque II).

([2]) HAMY, *loc. cit.*, p. 402, formule (A).

R étant une fonction de z et de m_1, qui reste finie lorsque m_1 croît indéfiniment.

Cette expression de $J(z)$ est valable pour les valeurs de z situées le long d'un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses (*fig.* 4) qu'entre les points z_1, z_2. Mais il convient de remarquer qu'elle n'est pas applicable pour des valeurs de z, pour lesquelles $\frac{\mu}{\mu - \nu}\xi$ devient infini, car on ne peut plus alors développer, comme nous l'avons fait, l'expression (19) de $\frac{1}{\Delta^s}$ suivant les puissances de $\xi = 1 - \frac{x}{\mu}$; il faut y joindre les valeurs de z pour lesquelles $\mu = \infty$, car la méthode de M. Darboux ne peut s'appliquer qu'autant que le point μ reste à distance finie.

Le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ (11) est égal à 1 pour les valeurs de z qui annulent la différence $a_1^2 - r^2$, c'est-à-dire pour les racines des équations (15); μ ne devient infini que pour $z = 0$ ou $z = \infty$; ξ devient infini pour $\mu = 0$, c'est-à-dire pour $z = \tang\frac{\psi}{2}$ et pour $z = 0$ ou $z = \infty$ (n° 5).

L'expression (21) de $J(z)$ est donc valable pour tous les points d'un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1, z_2 (*fig.* 4) et qui n'est infiniment voisin d'aucun point singulier de $J(z)$.

On peut remarquer que la fonction $R\Psi(z)$ qui est finie, le long d'un pareil chemin, d'après la méthode de M. Darboux, lorsque m_1 croît indéfiniment, n'a aucune singularité le long de ce chemin.

C'est ce qui résulte de la formule (21) et de ce que 1° la fonction $\Psi(z)$ n'a pas de singularités en dehors de celles de $J(z)$; 2° de ce que $\varphi^{m_1}(z)$ n'a pas de singularités en dehors de celles de $J(z)$, et de ce que l'équation $\varphi^{m_1}(z) = 0$ n'a pas de racines en dehors de $z = 0$ ou $z = \infty$, ainsi qu'il résulte des formules (11).

III.

Étude de la dérivée de la fonction $\varphi(z)$.

9. De l'expression (11) de $\varphi(z)$, on déduit

$$2z^2\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = V(z),$$

en faisant

$$(22) \qquad V(z) = \theta \sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right) - 2z\left(z + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right).$$

$\varphi(z)$ ne pouvant s'annuler que pour $z = 0$ ou $z = \infty$, les racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$, en dehors de $z = 0$, $z = \infty$, s'obtiennent en considérant l'équation $V(z) = 0$.

Étude de l'équation $V(z) = 0$. — L'équation $V(z) = 0$, résolue par rapport à θ, est

$$(23) \qquad \theta = \frac{2}{\sin\psi}\,\frac{z\left(z + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)}{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)};$$

on en tire

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{2}{\sin\psi}\,\frac{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)\left(2z + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right) - z\left(z + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left[z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2} + 2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)\right]}{\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^3\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2}.$$

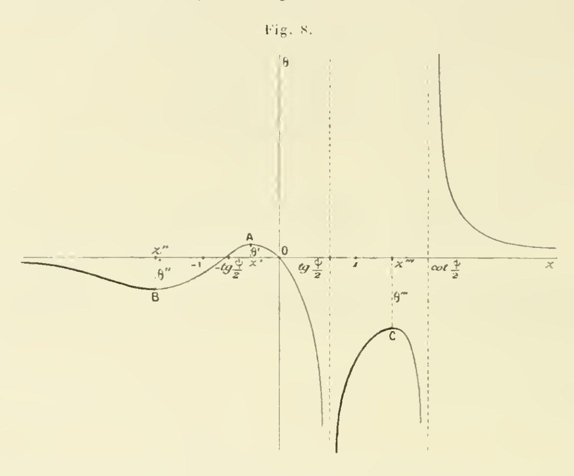
Le numérateur de $\frac{d\theta}{dz}$, du troisième degré en z, a ses racines réelles, savoir : $z = z''\left(-\infty < z'' < -\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)$; $z = z\left(-\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} < z < 0\right)$; $z = z'''\left(\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} < z'' < \cot\frac{\psi}{2}\right)$. Nous donnerons, dans un instant, les valeurs de z', z'', z''' et les valeurs correspondantes θ', θ'', θ''' de θ.

En considérant θ comme l'ordonnée d'une courbe dont z est l'abscisse, on construit immédiatement le lieu représenté par l'équa-

tion (23), en remarquant que θ est maximum pour $z = z'$, minimum pour $z = z''$ et $z = z'''$ (*fig.* 8).

En coupant la courbe par une parallèle à l'axe des abscisses, à une

Fig. 8.



distance de cet axe égale à la valeur de θ qui figure dans l'équation $V = 0$, les racines de cette équation sont figurées géométriquement par les abscisses des points de rencontre. On voit que z'' est racine double de l'équation $V = 0$ pour $\theta = \theta''$, z' racine double pour la valeur $\theta = \theta'$, z''' racine double pour la valeur $\theta = \theta'''$. Or, en posant

$$U(z) = \theta \sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right)^2 + 2z\left(z + \cot\frac{\psi}{2}\right),$$

on a l'identité

$$V\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}}{z^3}\,U(z).$$

Les racines de l'équation $V(z) = 0$ sont donc inverses des racines de l'équation $U(z) = 0$, étudiée dans un Mémoire précédent [1].

---

[1] HAMY, *loc. cit.*, Chap. III, p. 416.

L'équation $U(z) = 0$ a une racine double égale à

$$-\cot\frac{\psi}{6} \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{1}{8}\,\text{séc}^3\frac{\psi}{3},$$

une racine double égale à

$$-\text{tang}\left(30^\circ - \frac{\psi}{6}\right) \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right),$$

une racine double égale à

$$\text{tang}\left(30^\circ + \frac{\psi}{6}\right) \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ + \frac{\psi}{3}\right).$$

Il en résulte que les coordonnées des points A, B, C de la *fig.* 8 sont, puisque ψ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$,

$$(24) \qquad \begin{cases} \text{A} \begin{cases} z' = -\text{tang}\,\dfrac{\psi}{6}, \\ \theta' = \dfrac{1}{8}\,\text{séc}^3\,\dfrac{\psi}{3}; \end{cases} \\ \text{B} \begin{cases} z'' = -\cot\left(30^\circ - \dfrac{\psi}{6}\right), \\ \theta'' = -\dfrac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ - \dfrac{\psi}{3}\right); \end{cases} \\ \text{C} \begin{cases} z''' = \cot\left(30^\circ + \dfrac{\psi}{6}\right), \\ \theta''' = -\dfrac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ + \dfrac{\psi}{3}\right). \end{cases} \end{cases}$$

On voit que l'on a

$$(25) \qquad \begin{cases} z'' < -1 < -\text{tang}\,\dfrac{\psi}{2} < z' < 0 < \text{tang}\,\dfrac{\psi}{2} < 1 < z''' < \cot\dfrac{\psi}{2}, \\ |z''| > z''', \\ \theta''' < \theta'' < 0 < \theta'. \end{cases}$$

La *fig.* 8 permet de se rendre facilement compte de la nature des racines de l'équation $V(z) = 0$.

1° $\theta < \theta'''$. L'équation $V(z) = 0$ a trois racines réelles : une racine comprise entre 0 et $\tang\frac{\psi}{2}$; une racine comprise entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et z'''; une racine comprise entre z''' et $\cot\frac{\psi}{2}$. La seconde racine, que nous désignerons désormais par Z, croît de $\tang\frac{\psi}{2}$ à z''' lorsque θ croît de $-\infty$ à θ'''.

2° $\theta''' < \theta < \theta''$. L'équation $V(z) = 0$ a une racine réelle positive comprise entre 0 et $\tang\frac{\psi}{2}$, et deux racines imaginaires. On voit, sur la figure, que la racine réelle décroît lorsque θ augmente ; d'autre part, le produit des racines de l'équation $V(z) = 0$ ne dépendant pas de θ, il faut, par compensation, que le module des racines imaginaires croisse lorsque θ croît. Nous désignerons ces racines imaginaires par Z_i et Z_{-i}. D'après ce qui précède, $|Z_i|$ croît de z''' à $|z''|$ lorsque θ croît de θ''' à θ''.

3° $\theta'' < \theta < 0$. L'équation $V(z) = 0$ a trois racines réelles : une racine positive comprise entre 0 et $\tang\frac{\psi}{2}$; une racine négative comprise entre $-\tang\frac{\psi}{2}$ et z''; une autre racine négative comprise entre z'' et $-\infty$. Cette dernière racine, que nous désignerons encore par Z, décroît de z'' à $-\infty$ quand θ croît de θ'' à zéro.

4° $0 < \theta < \theta'$. L'équation $V(z) = 0$ a ses racines réelles : une racine supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$; une racine négative comprise entre zéro et z'; une autre racine négative comprise entre $-\tang\frac{\psi}{2}$ et z'.

5° $\theta' < \theta$. L'équation $V(z) = 0$ a une racine réelle supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$, et deux racines imaginaires.

Remarque relative aux cas 1° *et* 2°. — En supposant $\psi < 45°$, c'est-à-dire $e < 0,707$, ce qui a lieu dans toutes les applications, on a

$$|z''| < \cot\frac{\psi}{2}.$$

Il en résulte que, dans les cas 1° et 2°, Z ou $|Z_i|$ est compris entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\frac{\psi}{2}$.

10. *Résolution de l'équation* $V(z)=0$. — La résolution de l'équation $V(z)=0$ se ramène à celle de l'équation

$$v^3-(1-2\theta\cos\psi)v+2\theta=0,$$

en posant

$$z=\frac{v-1}{v+1}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

1° $\theta<\theta'''$ ou $\theta''<\theta<0$. En raisonnant, comme nous l'avons fait, dans un Mémoire précédent, pour résoudre l'équation $U(z)=0$, lorsqu'elle a ses racines réelles ([1]), on trouve que la racine Z, définie au n° **9**, a pour valeur

$$Z=\frac{v-1}{v+1}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2},$$

en posant

$$\cos\chi=-\theta\left(\frac{1-2\theta\cos\chi}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\qquad 0<\chi<90^\circ,$$

$$v=-2\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ-\frac{\chi}{3}\right).$$

2° $\theta'''<\theta<\theta''$. Les racines imaginaires Z_i et Z_{-i} de l'équation $V(z)=0$, définies au n° **9**, sont données par le Tableau de formules

$$\sin 2\chi=-\frac{1}{\theta}\left(\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}\right)^{\frac{3}{2}},\qquad \operatorname{tang}\xi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi},$$

$$v=-\sqrt{\frac{1-2\theta\cos\psi}{3}}\,\frac{1}{\sin 2\xi}\pm\sqrt{-1}\sqrt{1-2\theta\cos\psi}\cot 2\xi,$$

$$Z_i=\frac{v-1}{v+1}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2},\qquad Z_{-i}=\text{la conjuguée de } Z_i.$$

Nous supposons le signe de $\sqrt{-1}$ dans v choisi de façon que Z_i ait sa partie imaginaire positive.

Nous n'aurons pas à résoudre l'équation $V(z)=0$ lorsque θ sera compris entre d'autres limites que les précédentes.

([1]) Hamy, *loc. cit.*, p. 470.

IV.

Étude du module de la fonction $\varphi(z)$.

Nous avons trouvé (11)

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \tang\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[z E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta}.$$

En posant

$$z = \mathrm{R}E^{i\omega},$$

on trouve

$$(26)\quad |\varphi(z)| = \frac{\alpha}{\cos^2\frac{\psi}{2}}\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}\tang\frac{\psi}{2}\cos\omega + \tang^2\frac{\psi}{2}}\left[\mathrm{R}E^{-\frac{\sin\psi}{2}\cos\omega\left(\mathrm{R} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right)}\right]^{-\theta}.$$

11. *Étude de $|\varphi(z)|$ le long de la partie positive de l'axe des abscisses.* — En faisant $\omega = 0$ dans l'équation (26), on a

$$|\varphi(z)| = \frac{\alpha\mathrm{R}}{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(\mathrm{R} - \tang\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[\mathrm{R}E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(\mathrm{R} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right)}\right]^{-\theta} = \varphi(\mathrm{R}).$$

On en tire

$$\frac{2\mathrm{R}^2\left(\mathrm{R} - \tang\frac{\psi}{2}\right)}{|\varphi(z)|}\,\frac{d|\varphi(z)|}{d\mathrm{R}} = \mathrm{V}(\mathrm{R}),$$

$\mathrm{V}(\mathrm{R})$ étant le polynome (22) où R est mis à la place de z.

De la discussion de l'équation $\mathrm{V}(z) = 0$, faite au n° **9**, on déduit ce qui suit :

1° $\theta < \theta'''$. Pour R très petit, $\frac{d}{d\mathrm{R}}|\varphi(z)| < 0$, $\mathrm{V}(0)$ ayant le signe de $-\theta$; $|\varphi(z)|$ décroît donc lorsque R part de zéro, jusqu'à ce que R atteigne la racine de $\mathrm{V} = 0$ inférieure à $\tang\frac{\psi}{2}$. $|\varphi(z)|$ croît ensuite, devient infini pour $\mathrm{R} = \tang\frac{\psi}{2}$, décroît jusqu'à ce que R atteigne la racine Z de $\mathrm{V} = 0$, comprise entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et z''', croît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la troisième racine de $\mathrm{V} = 0$, puis décroît lorsque R croît indéfiniment.

On voit que lorsque la variable z parcourt l'axe des abscisses, $|\varphi(z)|$ passe par un minimum pour la valeur $z = Z$, qui est racine de $\varphi'(z) = 0$.

2° $\theta'' < \theta < 0$. $|\varphi(z)|$ décroît de $R = 0$ à la racine positive de $V = 0$, inférieure à $\tang\frac{\psi}{2}$; croît de cette racine à $R = \tang\frac{\psi}{2}$ et décroît ensuite lorsque R croît indéfiniment.

3° $\theta > 0$. $\frac{d}{dR}|\varphi(z)|$ est positif pour R très petit; $|\varphi(z)|$ croît donc lorsque R part de zéro, jusqu'à ce que R atteigne la valeur $R = \tang\frac{\psi}{2}$, devient infini pour $R = \tang\frac{\psi}{2}$, décroît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la racine de $V = 0$, supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$, puis croît lorsque R dépasse cette racine.

12. *Étude de $|\varphi(z)|$ le long de la partie négative de l'axe des abscisses.* — En faisant $\omega = \pi$ dans l'équation (26), on a

$$|\varphi(z)| = \frac{\alpha R}{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(R + \tang\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[R E^{\frac{\sin\psi}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)}\right]^{-\theta}.$$

On en tire

$$\frac{2R^2\left(R + \tang\frac{\psi}{2}\right)}{|\varphi(z)|}\,\frac{d\,|\varphi(z)|}{dR} = V(-R).$$

1° $\theta < \theta''$. $V(R) = 0$ n'a pas de racines négatives (n° 9), et pour R très petit, $V(-R)$ est positif; $|\varphi(z)|$ croît donc lorsque R croît, c'est-à-dire lorsque la variable z partant de l'origine va à $-\infty$.

2° $\theta'' < \theta < 0$. $|\varphi(z)|$ va en croissant lorsque R croît de zéro jusqu'à la valeur absolue de la racine de $V(z) = 0$ la plus voisine de zéro, décroît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la valeur absolue $-Z$ de la racine négative de $V(z)$, la plus grande en valeur absolue, puis décroît lorsque R croît de $-Z$ à $+\infty$.

On voit que $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z, en cheminant sur l'axe des abscisses, rencontre la valeur $z = Z$, qui est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

3° $0 < \theta < \theta'$. Pour R très petit, $V(-R) < 0$. Il en résulte que

$\varphi(z)$ décroît jusqu'à ce que z atteigne la racine négative la plus voisine de zéro de $V(z)$, croît ensuite jusqu'à ce que z atteigne la racine comprise entre z' et $-\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}$, puis décroît lorsque z décroît.

4° $\theta > \theta'$. $|\varphi(z)|$ décroît lorsque z décroît de zéro à $-\infty$.

15. *Étude de* $|\varphi(z)|$ *le long d'une circonférence, décrite de l'origine comme centre, avec un rayon* R. — On tire de la formule (26)

$$\frac{1}{|\varphi(z)|}\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial\omega} = \sin\omega\,\frac{-4R^2\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}-\theta\sin\psi(R^2-1)\left(R^2-2R\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\cos\omega+\operatorname{tang}^2\frac{\psi}{2}\right)}{2R\left(R^2-2R\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\cos\omega+\operatorname{tang}^2\frac{\psi}{2}\right)}.$$

$\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial\omega}$ a le signe de

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} N = -\sin\omega\Big[&4R^2\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}+\theta\sin\psi(R^2-1)\\ &\times\left(R^2-2R\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\cos\omega+\operatorname{tang}^2\frac{\psi}{2}\right)\Big].\end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord $\theta < 0$:

1° $R \leqq 1$. N a le signe de $-\sin\omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ passe par un maximum absolu pour $\omega = 0$ et par un minimum absolu pour $\omega = \pi$.

2° $R > 1$. On tire de l'équation (27)

$$\frac{N}{-\theta\sin\psi\,2R\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}(R^2-1)} = -\sin\omega(\cos\omega+P),$$

en posant

$$P = \frac{2R}{-\theta\sin\psi(R^2-1)} - \frac{R^2+\operatorname{tang}^2\frac{\psi}{2}}{2R\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}}.$$

N a le signe de

$$-\sin\omega(\cos\omega + P),$$

pour $\theta < 0$ et $R > 1$. Or, dans cette hypothèse

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{4\tan\frac{\psi}{2}R^2(1-R^2) - \theta\sin\psi(R^2-1)^2\left(R^2 - \tan^2\frac{\psi}{2}\right)}{2\theta\sin\psi(R^2-1)^2\tan\frac{\psi}{2}R^2} < 0;$$

P décroît donc alors de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque R croît de 1 à $+\infty$.

Appelons R_1 la valeur de R pour laquelle $P = 1$ et R_2 la valeur de R pour laquelle $P = -1$; on a $R_1 < R_2$.

Si $R < R_1$, P est supérieur à 1; l'équation $\cos\omega + P = 0$ n'a pas de racines réelles et N a le signe de $-\sin\omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

Si $R_1 < R < R_2$, P est compris entre 1 et -1 et l'équation $\cos\omega + P = 0$ a une racine ω_1, comprise entre 0 et π, et une racine $2\pi - \omega_1$, comprise entre π et 2π. On en déduit que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ et minimum pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = 2\pi - \omega_1$.

Si $R_2 < R$, P est inférieur à -1 et $\cos\omega + P$ est essentiellement négatif. N a donc le signe de $\sin\omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = \pi$, minimum pour $\omega = 0$.

Supposons, en second lieu, $\theta > 0$.

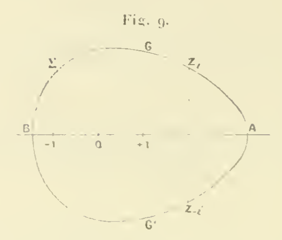
En considérant seulement le cas où $R > 1$, le crochet qui fait partie de N (27) est essentiellement positif, donc N a le signe de $-\sin\omega$.

Il en résulte que, lorsque z chemine le long de la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

14. Lorsque $\theta < 0$, P croît de -1 à $+1$ quand R décroît de R_2 à R_1 (n° **13**), R_2 et R_1 vérifiant les inégalités $R_2 > R_1 > 1$. Il en résulte que l'équation $\cos\omega + P = 0$ définit, en coordonnées polaires, une courbe fermée Σ, symétrique par rapport à l'axe polaire, dont le

rayon vecteur décroît de R_2 à R_1 lorsque ω croît de o à π (*fig.* 9) ou décroît de o à $-\pi$.

Fig. 9.



Variation de $|\varphi(z)|$ *le long de la courbe* Σ. — Lorsque la variable $z = \mathrm{R}e^{i\omega}$ chemine le long de la courbe Σ, $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ est identiquement nulle, puisque cette dérivée contient $\cos\omega + \mathrm{P}$ en facteur (n° **15**). Cela étant, si la dérivée $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \mathrm{R}}$ s'annule en un point (R, ω) de Σ, l'imaginaire $z = \mathrm{R}e^{i\omega}$ est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$, puisque les deux dérivées $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ et $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \mathrm{R}}$ sont alors simultanément nulles [1]. Réciproquement, si $z = \mathrm{R}e^{i\omega}$ est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$, les équations $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega} = 0$, $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \mathrm{R}} = 0$ admettent la solution R, ω. Si ω est différent de zéro ou de π, c'est-à-dire si la racine z est imaginaire, $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ n'étant nulle qu'autant que $\cos\omega + \mathrm{P}$ est nul (n° **15**), la racine z de $\varphi'(z) = 0$ se trouve alors sur la courbe Σ.

Cela posé, il est facile de voir comment $|\varphi(z)|$ varie le long de la courbe Σ.

Distinguons plusieurs cas.

1° $\theta < \theta''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a alors, à distance finie, que des racines réelles dont aucune n'est négative (n° **9**). $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \mathrm{R}}$ ne pouvant changer de signe sans passer par zéro, comme on s'en assure en dif-

(1) Hamy, *loc. cit.*, p. 404, n° 5.

férentiant la formule (26), cette dérivée, dis-je, a le même signe tout le long de la courbe Σ. Or $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ est positive le long de la partie négative de l'axe des abscisses (n° **12**), en particulier au point B. $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ a donc une valeur positive tout le long de la courbe Σ.

En observant que $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial\omega}$ est nulle le long de la courbe Σ, on a, en faisant suivre à la variable $z = RE^{i\omega}$ le chemin AGB ou le chemin AG'B,

$$(28) \qquad d|\varphi(z)| = \frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R} dR,$$

d'où il résulte

$$d|\varphi(z)| < 0,$$

puisque R va en décroissant.

Ainsi $|\varphi(z)|$ décroît constamment quand z suit le chemin AGB ou le chemin AG'B.

2° $\theta'' < \theta < \theta'$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a, en dehors de la circonférence $|z| = 1$, que deux racines imaginaires conjuguées Z_i et Z_{-i}, à distance finie (n° **9**). Ces racines se trouvent nécessairement, comme on l'a remarqué plus haut, sur la courbe Σ, en Z_i et en Z_{-i}. $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ est nulle en Z_i et Z_{-i} et différente de zéro en tout autre point de Σ. Or $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ est positive tout le long de la partie négative de l'axe des abscisses (n° **12**), en particulier au point B; $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ est donc positive tout le long de l'arc Z_iBZ_{-i} de la courbe Σ. De même $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ étant négative au point A (n° **11**), est négative tout le long de l'arc Z_iAZ_{-i}.

D'après la formule (28), lorsque la variable z parcourt l'arc AGB, $|\varphi(z)|$ croît le long de AZ_i et décroît le long de l'arc Z_iGB. De même $|\varphi(z)|$ croît le long de l'arc AZ_{-i} et décroît le long de l'arc $Z_{-i}G'B$.

3° $0 > \theta > \theta''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a, à distance finie, que des racines réelles, dont aucune n'est supérieure à 1 (n° **9**). $\frac{\partial|\varphi(z)|}{\partial R}$ con-

serve donc le même signe tout le long de la courbe Σ. Or $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est négative le long de la partie positive de l'axe des abscisses pour $R > \tang\frac{\psi}{2}$ (n° **11**), en particulier au point A. $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est donc négative tout le long de la courbe Σ.

On voit ainsi que, lorsque la variable z parcourt l'axe AGB ou l'axe AG'B, $\varphi(z)$ croît d'après la formule (28).

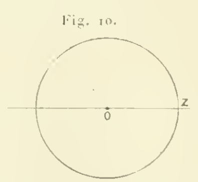
13. *Le contour* D *lorsque* $\theta < 0$. — Les considérations précédentes permettent de construire un contour fermé D contenant l'origine et passant soit par la racine Z de l'équation $\varphi(z) = 0$, si cette équation a toutes ses racines réelles, soit par les racines Z_i et Z_{-i} de l'équation $\varphi'(z) = 0$, si cette équation a des racines imaginaires, un contour, dis-je, le long duquel $|\varphi(z)|$ est maximum absolu, soit pour $z = Z$, soit pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$.

1° $\theta < \theta'''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors ses racines réelles (n° **9**) et la racine Z est comprise entre $\tang\frac{\psi}{2}$ et $\cot\left(30^\circ + \frac{\psi}{6}\right)$.

Décrivons de l'origine comme centre une circonférence passant par le point Z. $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z décrivant l'axe des abscisses passe par le point $z = Z$ (n° **11**, 1°). Il en résulte, puisque $\varphi'(Z) = 0$, que $|\varphi(z)|$ passe par un maximum lorsque la variable z décrivant la circonférence, qui est normale à l'axe des abscisses, passe par le point Z[1]. Cela étant, il y a deux cas à considérer.

Si $\cos\omega + P$ ne s'annule pas le long de la circonférence, ce qui

Fig. 10.



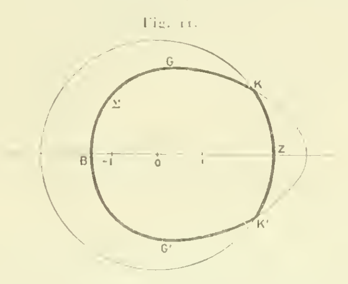
arrive en particulier si $Z < 1$, $|\varphi(z)|$ est nécessairement maximum

[1] HAMY, *loc. cit.*, p. 404, n° 5.

absolu sur la circonférence au point Z (n° 15). Cette circonférence (*fig.* 10) constitue ainsi le contour cherché D.

Si $\cos\omega + P$ s'annule, le long de la circonférence, aux points K, K', cette circonférence rencontre aux points K, K' la courbe Σ dont il a été question au n° 14. Or $|\varphi(z)|$ va en décroissant le long des arcs ZK, ZK' de la circonférence (n° 15), et en décroissant le long

Fig. 11.



des arcs KGB, K'G'B de la courbe Σ (n° 14, 1°). Le chemin ZKGBG'K'Z, marqué sur la *fig.* 11 en traits gras, constitue donc le contour cherché D.

Remarque. — Lorsque la variable parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z dans une direction formant un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ avec la partie positive de l'axe des abscisses.

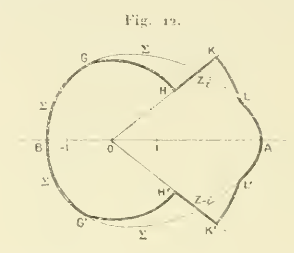
2° $\theta'' < \theta < \theta'$. — L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors deux racines imaginaires Z_i et Z_{-i}, de module supérieur à 1, qui se trouvent sur la courbe Σ (n° 14). D'autre part $|\varphi(z)|$ est maximum absolu le long de cette courbe pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$. Nous pourrions donc adopter la courbe Σ pour le contour D; mais il y aurait dans ce choix un inconvénient, résultant de ce que la direction de la tangente à la courbe S, aux points Z_i et Z_{-i}, ne s'obtient pas immédiatement, une fois les racines Z_i et Z_{-i} connues [1]. Aussi convient-il de modifier comme il suit le chemin Σ.

Considérons la circonférence décrite de l'origine comme centre avec

[1] Il est nécessaire de connaître la direction de la tangente au contour D, en chacun de ces points, pour fixer le sens de certains radicaux.

le rayon OZ_i. $\cos\omega + P$ s'annule le long de cette circonférence pour $z = Z_i$ et pour $z = Z_{-i}$, puisque ces points appartiennent à Σ. Il en résulte que $|\varphi(z)|$ devient minimum lorsque la variable z, décrivant la circonférence, passe par les points Z_i et Z_{-i} (n° **13**, 2°).

Fig. 12.



Z_i et Z_{-i} étant des racines de $\varphi'(z)$, $|\varphi(z)|$ passe par un maximum lorsque la variable z, cheminant le long du rayon OZ_i ou du rayon OZ_{-i}, qui sont normaux à la circonférence, passe par le point Z_i ou Z_{-i} (¹).

Cela étant, prenons sur le rayon OZ_i des points H et K, à une distance finie du point Z_i d'ailleurs aussi petite que l'on veut; décrivons, de l'origine comme centre, les arcs de cercle HG, KL limités à la courbe Σ. Je dis que $|\varphi(z)|$ décroît le long du chemin Z_iHGB et le long du chemin Z_iKLA.

Effectivement, $|\varphi(z)|$ passant par un maximum au point Z_i, le long de HK, $|\varphi(z)|$ décroît le long de Z_iH, H étant pris suffisamment près de Z_i. D'autre part, $\cos\omega + P$ étant nul au point G, le long de la circonférence de rayon OH, $|\varphi(z)|$, va en diminuant le long de l'arc HG de cette circonférence (n° **13**, 2°). Enfin $|\varphi(z)|$ diminue le long de l'arc GB de la courbe Σ (n° **14**, 2°).

De même, en prenant K suffisamment près de Z_i, $|\varphi(z)|$ décroît le long de Z_iK. D'autre part, $\cos\omega + P$ étant nul au point L, le long de la circonférence de rayon OK, $|\varphi(z)|$ va en diminuant le long de l'arc KL de cette circonférence (n° **13**, 2°). Enfin $|\varphi(z)|$ diminue le long de l'arc LA de la courbe Σ (n° **14**, 2°).

(¹) HAMY, *loc. cit.*, p. 404, n° 5.

On verrait de même que le long du chemin BG'H' Z_{-i}K'L'A, $|\varphi(z)|$ passe par un maximum pour $z = Z_{-i}$. Ainsi, nous pouvons prendre, pour le contour cherché D, le chemin marqué en traits gras sur la *fig.* 12.

Remarques. — Soit Ω l'argument de Z_i. Lorsque la variable z parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z_i dans une direction formant un angle égal à $\pi + \Omega$, à un multiple près de 2π, avec la direction des abscisses positives. La direction du chemin suivi au point Z_{-i} forme, avec la direction des abscisses positives, un angle égal à $-\Omega$.

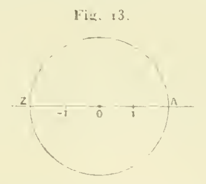
Le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine supérieure à 1.

3° $0 > \theta > \theta''$. — L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors ses racines réelles : la racine Z est négative et supérieure, en valeur absolue, à $\cot\left(30° - \frac{\psi}{6}\right)$, quantité plus grande que 1.

Décrivons de l'origine comme centre une circonférence passant par le point Z. $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z, décrivant l'axe des abscisses, passe par le point Z (n° **12**, 2°). Il en résulte, comme précédemment, que $|\varphi(z)|$ passe par un maximum, lorsque la variable z, décrivant la circonférence, passe par le point Z. Cela étant, il y a deux cas à considérer.

Si $\cos\omega + P$ ne s'annule pas le long de la circonférence, $|\varphi(z)|$ est nécessairement maximum absolu au point Z le long de la circonférence

Fig. 13.

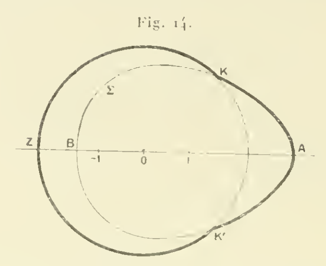


(n° **15**, 2°). Cette circonférence (*fig.* 13) constitue donc le contour cherché D.

Si $\cos\omega + P$ s'annule le long de la circonférence aux points K, K' (*fig.* 14), cette circonférence rencontre aux points K, K' la courbe Σ du n° **14**. Or $|\varphi(z)|$ décroît le long des arcs ZK, ZK' de

la circonférence (n° **15**) et décroît le long des arcs KA, K′A de la courbe Σ (n° **14**, 3°). Le chemin marqué en traits gras sur la *fig.* 14 constitue donc le contour cherché D.

Fig. 14.



Remarques. — Lorsque la variable z parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z dans une direction formant un angle égal à $\frac{3\pi}{2}$ avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine supérieure à 1.

16. *Le contour* D *lorsque* $\theta > 0$. — Nous désignerons alors par D une circonférence décrite, de l'origine comme centre, avec un rayon arbitraire compris entre $\cot\frac{\psi}{2}$ et la racine $z_1 > 1$ de la première équation (15) (n° **5**); la différence entre ce rayon et les limites qui le comprennent est, d'ailleurs, supposée finie.

On a vu que, le long d'un pareil chemin, $|\varphi(z)|$ est maximum absolu au point où ce chemin rencontre la partie positive de l'axe des abscisses (n° **15**).

V.

Changement du contour d'intégration de l'intégrale I.

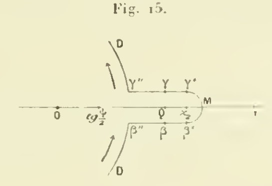
17. Le contour D, qui vient d'être défini, va nous servir pour le calcul de l'intégrale I. Dans certains cas, ce sera ce contour lui-même

qui nous permettra d'évaluer l'intégrale ; dans d'autres cas, il faudra le déformer comme nous allons tout d'abord l'expliquer.

Supposons, en premier lieu, que le point où le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses soit plus rapproché de l'origine que le point singulier z_2 de $J(z)$ (ce cas se présente seulement lorsque $\theta < \theta''$ et $Z < z_2$). Il faut alors déformer ce contour de façon qu'il renferme le point z_2, si l'on veut qu'il soit équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I (n° 6, *remarque*).

Du point z_2, comme centre, décrivons une demi-circonférence $\beta' M \gamma'$, avec un rayon très petit. Menons, à l'axe des abscisses, les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$, limitées au contour D. Ce contour, modifié comme l'indique la *fig.* 15, est équivalent, pour l'intégrale I, à la circonférence $|z| = 1$.

Fig. 15.



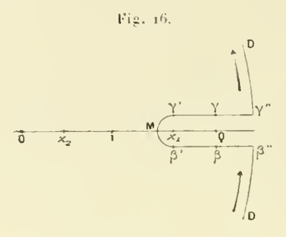
Nous prendrons sur les droites $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ des points β, γ symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point z_2, mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_2, soit valable jusqu'en β, γ.

Supposons, en second lieu, que le point où le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses soit plus éloigné de l'origine que le point singulier z_1 de $J(z)$. Il faut alors déformer ce contour, de façon que le point z_1 n'y pénètre pas, si l'on veut qu'il soit équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I (n° 6).

Du point z_1 comme centre, décrivons une demi-circonférence $\beta' M \gamma'$, avec un rayon très petit. Menons à l'axe des abscisses les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$, limitées à la circonférence D. Ce contour, modifié comme l'indique la *fig.* 16, est équivalent pour l'intégrale I à la circonférence $|z| = 1$. Nous prendrons sur les droites $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ des points β, γ, symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du

point z_1, mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_1, soit valable jusqu'en β, γ.

Fig. 16.



Ces points β, γ seront d'ailleurs assujettis à la condition que leur projection Q, sur l'axe des abscisses, se trouve à une distance de l'origine inférieure à $\cot \frac{\psi}{2}$.

Nous désignerons dorénavant par D' le contour $\beta\beta' M\gamma'\gamma$ et par D'' le reste du contour (*fig.* 15 et 16). Nous appellerons I' la partie de l'intégrale I prise le long de D', et I'' la seconde partie de I prise le long de D''.

Nous démontrerons plus loin que I', dans le cas de la *fig.* 15, est égale au produit d'une quantité finie par $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_2)$ et que, dans le cas de la *fig.* 16, I' est égale au produit d'une quantité finie par $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_1)$.

18. Pour évaluer l'intégrale I lorsque le chemin D est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ ou la partie I'' de cette intégrale prise le long de D'', dans les cas des *fig.* 15 et 16, on peut remplacer sous le signe $\int$ la fonction J(z) par son expression (21) pour des motifs qui ont été exposés à la fin du n° **8**. On est ainsi conduit à considérer l'intégrale

$$(29) \qquad \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\int \Psi(z)\left(1+\frac{R}{m_1}\right)\varphi^{m_1}(z)\,dz.$$

Toutefois, s'il arrive, dans le cas de la *fig.* 16, que le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine

supérieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ ([1]), les parallèles $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$ sont voisines du point singulier $z = \cot\frac{\psi}{2}$ de $J(z)$ et peut-être aussi du point $z = z'_1$. Il convient alors, pour pouvoir employer l'expression (21) de $J(z)$, tout le long du chemin D'', il convient, dis-je, de dilater $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$, dans le voisinage des points $z = \cot\frac{\psi}{2}$ et $z = z'_1$, de façon que ces singularités de $J(z)$ soient à distance finie du chemin d'intégration. Les déformations de $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$ peuvent d'ailleurs être construites assez petites pour que $|\varphi(z)|$ soit inférieur à $|\varphi(z_1)|$, le long de ces déformations, puisque $\left|\varphi\left(\cot\frac{\psi}{2}\right)\right| < |\varphi(z_1)|$ et $|\varphi(z'_1)| < |\varphi(z_1)|$ (n° **11**, 2°). On voit donc que s'il existe sur le contour D'' (*fig.* 16), avant la déformation de $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$, un point z où $|\varphi(z)|$ est supérieur à $|\varphi(z_1)|$, ce point jouira de la même propriété après la déformation de ces parallèles; si $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de D'' avant la déformation des droites $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$, il en sera encore de même après leur déformation. C'est là ce qu'il importe de savoir, et nous n'aurons plus à revenir sur ces déformations de $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$ qui ne jouent aucun rôle dans le problème qui nous occupe.

19. Les considérations qui précèdent permettent de trouver la valeur de I dans les différents cas qui peuvent se présenter.

Supposons d'abord $\theta < \theta''$:

1° $Z < z_2$. Le contour D doit être déformé comme il est indiqué (*fig.* 15), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. Or $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_2)|$ tout le long de la partie D'' du contour de la *fig.* 15 (n^{os} **15** et **11**). L'intégrale (29) prise le long de D'' étant égale à I'', on a asymptotiquement, pour les motifs qui ont été donnés dans l'avant-propos du présent Mémoire, et d'après ce que nous avons dit à la fin du n° **17**, on a

$$I = I''.$$

2° $z_1 > Z > z_2$. Le contour D est équivalent pour l'intégrale I à la circonférence $|z| = 1$, et l'intégrale (29) prise le long de D est égale

---

([1]) D'après la définition du contour D (n^{os} **15** et **16**) et la discussion de l'équation $V(z) = 0$ (n° **9**), cette hypothèse n'est possible que si $\theta'' < \theta < 0$.

à I. Les fonctions $\Psi(z)\left(1+\frac{R}{m_1}\right)$ et $\varphi(z)$ sont holomorphes le long du chemin d'intégration (n° **8**); d'autre part, lorsque la variable décrit ce contour $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour la valeur $z = Z$ qui est racine de $\varphi'(z)$. L'évaluation approchée de l'intégrale I s'obtient donc par la considération de ce point Z[1] et l'on peut écrire

$$\text{(30)} \qquad I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\sqrt{-\frac{2\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}}\,\Psi(Z)\varphi^{m_1}(Z)(1+\varepsilon),$$

le produit $m_1\varepsilon$ restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

La direction de la tangente au contour au point Z faisant l'angle $\frac{\pi}{2}$ avec la direction positive de l'axe des abscisses, la partie imaginaire du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est positive.

3° $Z > z_1$. Le contour D doit être déformé, comme il est indiqué (*fig.* 16), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. Or $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de la partie D'' du contour de la *fig.* 16 (n^{os} **13** et **11**). L'intégrale (29) prise le long de D'' étant égale à I', on a asymptotiquement, pour les mêmes raisons que plus haut,

$$I = I'.$$

Supposons en second lieu $\theta'' < \theta < \theta''$.

1° Si le point où le contour D de la *fig.* 12 rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus rapproché de l'origine que le point z_1, ce contour est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ et l'intégrale (29), prise le long de ce chemin D, est égale à I. Le long de ce contour $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$. L'évaluation approchée de I s'obtient donc par la considération de ces points[1] et l'on a

$$\text{(31)} \qquad \left\{\begin{aligned} I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\Bigg[&\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}\,\Psi(Z_i)\varphi^{m_1}(Z_i) \\ &+\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}\,\Psi(Z_{-i})\varphi^{m_1}(Z_{-i})\Bigg](1+\varepsilon), \end{aligned}\right.$$

le produit $m_1\varepsilon$ restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

---

[1] HAMY, *loc. cit.*, p. 403.

En appelant Ω l'argument de $Z_i (0 < \Omega < \pi)$ la direction de la tangente au contour au point Z_i est $\Omega + \pi$, par rapport à la direction positive de l'axe des abscisses; la direction de la tangente au contour au point Z_{-i} est $2\pi - \Omega$ (nº **15**, remarques); il n'y a donc qu'à appliquer la règle donnée dans un Mémoire précédent ([1]) pour avoir le sens des radicaux $\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}$ et $\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}$.

Dans ce cas, on a nécessairement $|\varphi(z_1)| < |\varphi(Z_i)|$ (nºs **15** et **11**).

2º Si le point où le contour D de la *fig.* 12 rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus éloigné de l'origine que le point z_1, il faut déformer ce contour, comme il est indiqué (*fig.* 16), pour qu'il devienne équivalent à la circonférence $|z| = 1$. L'intégrale I peut alors se décomposer en deux parties I'' et I' (nº **17**).

L'intégrale I'' s'évalue comme dans le cas précédent et sa valeur est donnée par la formule (31). L'intégrale I' contient, comme nous l'avons dit au nº **17**, $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_1)$ en facteur. D'après les remarques faites dans l'avant-propos du présent Mémoire, si $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_1)|$, la valeur asymptotique de I est donnée par I'', c'est-à-dire par la formule (31); si, au contraire, $|\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_1)|$, I' est la valeur asymptotique de I.

Considérons en troisième lieu le cas où $\theta'' < \theta < 0$.

1º Si le point A où le contour D (*fig.* 13 ou 14) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus près de l'origine que le point z_1, ce contour est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ et l'intégrale (29), prise le long de D, est égale à I. Le long de ce chemin $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $z = Z$. L'évaluation approchée de I s'obtient donc par la considération de ce point et l'on a

$$I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi}\sqrt{-\frac{2\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}}\,\Psi(Z)\varphi^{m_1}(Z)(1+\varepsilon), \tag{32}$$

le produit $m_1\varepsilon$ restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

La direction de la tangente au contour au point Z, menée dans le sens de l'intégration, fait l'angle $\frac{3\pi}{2}$ avec la direction positive de l'axe

([1]) HAMY, *loc. cit.*, p. 404.

des abscisses; la partie imaginaire du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est donc négative. Dans ce cas, on a nécessairement $|\varphi(z_1)| < |\varphi(Z)|$ (nos **15** et **11**).

2° Si le contour D (*fig.* 13 ou 14) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses en un point A plus éloigné de l'origine que le point z_1, il faut déformer ce contour comme il est indiqué (*fig.* 16), pour qu'il devienne équivalent à la circonférence $|z| = 1$. L'intégrale I peut alors se décomposer en deux parties I' et I'' (n° **17**).

L'intégrale I'' s'évalue comme dans le cas précédent, et sa valeur est donnée par la formule (32). L'intégrale I' contient $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_1)$ en facteur comme nous l'avons dit au n° **17**. Si donc $|\varphi(Z)| < |\varphi(z_1)|$, la valeur asymptotique de I est donnée par I'', c'est-à-dire par la formule (32); si $|\varphi(Z)| < |\varphi(z_1)|$, on a asymptotiquement $I = I'$.

Considérons en quatrième lieu le cas où $\theta > 0$.

Le contour D du n° **16** doit être déformé comme il est indiqué (*fig.* 16), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de la partie D'' du contour ainsi modifié (nos **16** et **11**); on a donc asymptotiquement $I = I'$, d'après ce qui a été dit au n° **17** et dans l'avant-propos du présent Mémoire.

Il reste, pour avoir la valeur de I dans tous les cas possibles, à déterminer la valeur de l'intégrale I' qui a été définie au n° **17**. C'est de cette détermination que nous allons maintenant nous occuper, en nous plaçant dans le cas de la *fig.* 16, pour fixer les idées. Un simple changement d'indice, dans le résultat obtenu, sera ensuite suffisant pour obtenir la valeur de I', dans le cas de la *fig* 15.

VI.

20. Il faut tout d'abord mettre la fonction $F(x, z)$ (12) sous une forme particulière. Posons

$$x_1 = \frac{1}{\varphi(z_1)}, \tag{33}$$

et considérons l'expression du carré de la distance des planètes qui peut s'écrire, d'après les formules (11),

$$\Delta = -\frac{r^2\varphi(z)}{x}\left[x - \frac{1}{\varphi(z)}\right]\left[x - \frac{a_1^2}{r^2}\frac{1}{\varphi(z)}\right]. \tag{34}$$

Δ est une fonction holomorphe de $x - x_1$ et de $z - z_1$ dans un certain domaine. Cette fonction a deux racines égales à z_1 pour $x = x_1$, puisque r^2 est égal à a_1^2 pour $z = z_1$ (n° 5).

Il résulte de là que, pour x voisin de x_1, Δ a deux racines σ', σ'' voisines de z_1 et que l'on peut poser identiquement (¹)

$$(35) \qquad \Delta = \frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}(z - \sigma')(z - \sigma'').$$

Dans cette expression, le polynome $(z - \sigma')(z - \sigma'')$ a pour coefficients des fonctions holomorphes de $x - x_1$. La fonction $\frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}$ est d'ailleurs holomorphe en $z - z_1$, $x - x_1$, dans un certain domaine, et ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$. Il en résulte que $H(z - z_1, x - x_1)$ ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$, et est elle-même holomorphe en $z - z_1$, $x - x_1$, dans un certain domaine.

Il est facile de calculer ces racines σ' et σ'' par des moyens analogues à ceux que j'ai employés pages 439 et 440 de mon Mémoire déjà cité.

La racine σ' de l'équation $x = \frac{1}{\varphi(z)}$, développée suivant les puissances de $\frac{x - x_1}{x_1}$, est

$$(36) \qquad z = \sigma' = z_1 - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \ldots.$$

La racine σ'' de l'équation $x = \frac{a_1^2}{r^2} \frac{1}{\varphi(z)}$, développée suivant les puissances de $\frac{x - x_1}{x_1}$, est

$$(37) \qquad z = \sigma'' = z_1 + \frac{1}{\frac{\sin\psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} \frac{x - x_1}{x_1} + \ldots.$$

(¹) Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 316 et 317. — Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 241.

De ces expressions on déduit

$$(38)\left\{\begin{aligned} h &= \frac{\sigma' + \sigma''}{2} = z_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}\right]\frac{x - x_1}{x_1} + \ldots, \\ k &= \left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}\right]^2\left(\frac{x - x_1}{x_1}\right)^2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Des formules (34), (35), (38) on tire, d'autre part,

$$(39)\qquad \frac{1}{\mathrm{H}(0, 0)} = a_1^2\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\left[\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\right].$$

D'après les formules (35), (38), l'expression de $\mathrm{F}(x, z)$ peut s'écrire

$$\mathrm{F}(x, z) = \left[\frac{\mathrm{H}(z - z_1, x - x_1)}{(z - h)^2 - k}\right]^s\frac{r}{az}f_1(t^{-\theta}x)f(z),$$

ou, en posant

$$(40)\left\{\begin{aligned} \lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1) &= [\mathrm{H}(z - z_1, x - x_1)]^s\frac{r}{az}f_1(t^{-\theta}x)f(z), \\ \mathrm{F}(x, z) &= \frac{\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)}{[(z - h)^2 - k]^s}, \end{aligned}\right.$$

la fonction λ^s étant holomorphe en $x - x_1$, $z - z_1$ dans un certain domaine et ne s'annulant pas pour $x = x_1$, $z = z_1$. On a d'ailleurs, d'après les formules (11) et (39),

$$(41)\qquad \lambda^{(s)}(0, 0) = [\mathrm{H}(0, 0)]^s\frac{\alpha}{z_1}f_1\left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z_1 - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z_1}\right]f(z_1).$$

La fonction $\lambda^{(s)}$ est développable suivant les puissances de $z - z_1$ et de $x - x_1$, et h suivant les puissances de $x - x_1$; cette fonction est donc développable suivant les puissances de $z - h$ puisque h se réduit à z_1 pour $x = x_1$ (38). Ainsi l'on peut écrire

$$(42)\qquad \mathrm{F}(x, z) = \frac{\mathrm{D}_0 + (z - h)\mathrm{D}_1 + (z - h)^2\mathrm{D}_2 + \ldots}{[(z - h)^2 - k]^s}$$

les fonctions de x, D_0, D_1, D_2, ... étant holomorphes en $x - x_1$. La valeur de D_0 pour $x = x_1$ n'est autre que $\lambda^s(0, 0)$, puisque h se réduit à z_1 pour $x = x_1$.

Remarque. — Reportons-nous à la *fig.* 16. Appelons Q la projection des points γ, β sur l'axe des abscisses, projection qui est à une distance de l'origine inférieure à $\cot\frac{\psi}{2}$ (nº **18**), et soit y l'affixe d'un point quelconque pris sur le segment MQ de l'axe des abscisses. On voit sans peine (nº **9**) que l'on a

$$V(y) < 0.$$

D'après l'identité

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -\frac{V(z)}{2z^2\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)},$$

il en résulte

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < 0, \\[2ex] \dfrac{\sin\psi}{\alpha}\dfrac{y^2 - 1}{y^2} - \dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > \left|\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right| > 0. \end{array}\right.$$

On déduit de là, en faisant $y = z_1$ (39),

$$H(0, 0) < 0.$$

On trouverait de même, dans le cas de la *fig.* 15, que la quantité $H(0, 0)$ qui se déduit de la formule (39) en remplaçant z_1 par z_2, que cette quantité, dis-je, est encore négative. Si l'on appelle y un point du segment MQ (*fig.* 15), on a en effet dans ce cas

$$V(y) > 0,$$

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > 0 > \frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{y^2 - 1}{y^2} - \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

21. I a pour valeur l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int J(z)\,dz,$$

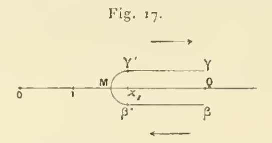
prise le long du chemin $\beta\beta' M\gamma'\gamma$ (*fig.* 17), (cas de la *fig.* 16). La

fonction $J(z)$ est d'ailleurs définie par l'intégrale

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi}\int F(x, z)\frac{dx}{x^{m_1+1}},$$

prise le long d'un contour S qui renferme le point ν (*fig.* 2), dont tous les points sont plus éloignés de l'origine que le point μ, sauf dans le

Fig. 17.



voisinage de ce point, et tel que la droite μO rencontre ce contour en un point unique (nos **7** et **5**).

Il est facile de déterminer les points μ et ν lorsque z est un point quelconque du chemin représenté (*fig.* 17).

Supposons d'abord que z soit un point de la demi-circonférence $\beta'M\gamma'$ (*fig.* 17), dont le rayon ε est infiniment petit. Les expressions (4), (11), (33) donnent, en observant que $r = a_1$ pour $z = z_1$,

$$\frac{\mu - x_1}{x_1} = -\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}(z - z_1),$$

$$\frac{\nu - x_1}{x_1} = \left[\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}\right](z - z_1).$$

Supposons en second lieu que z soit un point de $\beta\beta'$. Appelons y l'abscisse de ce point et posons $x' = \frac{1}{\varphi(y)}\cdot$ Son ordonnée étant infiniment petite et égale à $-\varepsilon$, on a

$$\frac{\mu - x'}{x'} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\varepsilon\sqrt{-1},$$

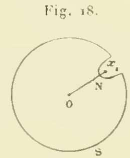
$$\frac{\nu - x'}{x'} = \left(\frac{a_1}{r}\right)_y^2 - 1 + \left(\frac{a_1}{r}\right)_y^2\left[\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} - \left(\frac{a_1}{r}\right)_y\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{y^2 - 1}{y^2}\right]\varepsilon\sqrt{-1}.$$

En changeant ε en $-\varepsilon$ dans ces formules, on obtient les expressions de μ et de ν qui correspondent au cas où z est un point de $\gamma\gamma'$; y étant supérieur à z_1, on a $\left(\frac{a_1}{r}\right)_y > 1$ (no 6); le coefficient de $\varepsilon\sqrt{-1}$

dans $\frac{\nu - x'}{x'}$ est donc supérieur en valeur absolue au même coefficient dans $\frac{\mu - x'}{x'}$, d'après les inégalités (43). On peut d'ailleurs supposer que les points β, γ ont été pris assez près de z_1, tout en étant à distance finie de ce point, pour que la plus grande valeur absolue de $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$ soit inférieure à la plus petite valeur absolue du coefficient de $\varepsilon\sqrt{-1}$ dans l'expression de $\frac{\nu - x'}{x'}$, lorsque z chemine le long de $\beta\beta'$ ou de $\gamma\gamma'$.

Cela étant, on voit par des considérations analogues à celles que j'ai employées dans mon Mémoire plusieurs fois cité (p. 447 et suivantes) : 1° que l'on peut prendre dans le plan de la variable x pour l'intégrale $J(z)$, un contour unique S, *quelle que soit la position du point z sur le chemin de la fig.* 17; 2° le contour S est une circonfé-

Fig. 18.



rence de rayon supérieur à $|x_1|$, déformée le long de la droite Ox_1, de façon à laisser le point x_1 à l'extérieur du contour (*fig.* 18); 3° on peut écrire

$$(44) \qquad I = \frac{1}{2i\pi}\int_S \Phi(x)\frac{dx}{x^{m_1+1}},$$

$\Phi(x)$ désignant la fonction

$$(45) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int F(x, z)\,dz,$$

où l'intégrale est prise le long du chemin $C' = \beta\beta' M\gamma'\gamma$ de la *fig.* 17; 4° en s'appuyant sur ce que $H(0,0) < 0$ et sur les considérations développées au n° **7**, on reconnaît que le point $x = x_1$ est un point singulier de la fonction $\Phi(x)$.

22. Le développement de la fonction $\Phi(x)$ autour du point $x = x_1$

s'obtient en partant de la formule (42) et écrivant

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{D_0 + (z-h)D_1 + (z-h^2)D_2 + \ldots}{[(z-h)^2 - k]^s}\,dz.$$

En posant

$$J_p^{s} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{(z-h)^p}{[(z-h)^2-k]^s}\,dz,$$

il vient

$$\Phi(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} D_p J_p^{(s)}.$$

J'ai antérieurement étudié ces intégrales $J_p^{(s)}$, et comme je n'aurais à répéter ici que ce que j'ai déjà dit, je n'y reviendrai pas. L'intégrale $J_0^{(\frac{1}{2})}$ ou du moins sa partie non holomorphe est égale, dans le cas actuel, à $-\log k$ au lieu de $\log k$, à cause du sens de l'intégration. Il en résulte aussi un changement de signe dans la partie non holomorphe de $J_p^{(s)}$. La partie non holomorphe du développement de $\Phi(x)$, qui se trouve page 456 de mon Mémoire, doit donc être ici changée de signe. Ainsi l'on a, dans le voisinage du point $x = x_1$,

$$\begin{aligned} 2i\pi\Phi(x) = &- \sum_{p=0}^{p=2s-3} 2\,\frac{2.4\ldots(2s-3-p)}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}\,\frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}}\,D_p \\ &- \log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\sum_{p=2s-1}^{p=\infty} 2\,\frac{2s(2s+2)\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2s+1)}\,k^{\frac{p+1}{2}-s}\,D_p \\ &+ \text{fonction holomorphe}; \end{aligned}$$

l'entier p ne devant recevoir que des valeurs paires positives, y compris zéro; la factorielle $\frac{2s(2s+2)\ldots(p-1)}{2.4\ldots(p-2s+1)}$ devant être remplacée par 1 pour $p=0$ et $s=\frac{1}{2}$, ainsi que la factorielle $\frac{2.4\ldots(2s-3-p)}{(p+1)(p+3)\ldots(2s-2)}$ pour $p=0$ et $s=\frac{3}{2}$.

Cherchons, dans le développement de $\Phi(x)$, le terme de la partie non holomorphe qui contient la puissance de $1-\frac{x}{x_1}$ avec son plus faible exposant.

1° Si $s = \frac{1}{2}$, le premier signe $\sum$ disparaît du développement de $\Phi(x)$, et le premier terme du second signe $\sum$ a pour valeur

$$-2 D_0 \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \qquad (s = \tfrac{1}{2}).$$

D_0 est holomorphe en $x - x_1$; son terme constant (n° **20**), pour $s = \frac{1}{2}$, a pour valeur $\lambda^{\frac{1}{2}}(0,0)$. On peut donc écrire, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\Phi(x) = &-\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(0,0)}{i\pi} \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ &\times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\right] \\ &+ \text{fonction holomorphe.}\end{aligned}$$

2° Si $s \geqq \frac{3}{2}$, le terme du développement de $\Phi(x)$, qui correspond à $p = 0$, est sous le premier signe $\sum$. Il a pour expression

$$-2 \frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}}} D_0.$$

Le terme cherché s'obtient en remplaçant D_0 par son terme constant $\lambda^s(0,0)$ (n° **20**) et k par son premier terme (38). On peut donc écrire, pour $s \geqq \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}\Phi(x) = &\frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}}\lambda^{(s)}(0,0)}{i\pi} \left[\frac{1\;\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2-1}{z_1^2}\frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}{2\;\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z_1^2-1}{z_2^1}\frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}}\right]^{-2s+1} \\ &\times \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{-2s+1} \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe}\right] \\ &+ \text{fonction holomorphe};\end{aligned}$$

la factorielle $\frac{2.4\ldots 2s-3}{1.3\ldots 2s-2}$ devant être remplacée par 1 pour $s = \frac{3}{2}$.

La valeur donnée pour $J_0^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ suppose essentiellement que l'argument

choisi pour $\sqrt{H(o,o)}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ à un multiple près de 2π. Le facteur $[H(o,o)]^s$ qui rentre dans $\lambda^s(o,o)$ peut donc s'écrire

$$[H(o,o)]^s = (-1)^{s-\frac{1}{2}} i [-H(o,o)]^s,$$

$[-H(o,o)]^s$ ayant un sens purement arithmétique. Il en résulte

$$(-1)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\lambda^s(o,o)}{i} = [-H(o,o)]^s \frac{\alpha}{z_1} f_1 \left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z_1 - \tang\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z_1}\right] f(z_1).$$

En tenant compte de la formule (39) et posant

$$\begin{aligned} B^{s)}(z) = \frac{a^{-2s}}{\pi z} & \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z^2-1}{z^2}\right)\right]^{s-1} \left[\frac{\sin\psi(z^2-1)}{2z^2}\right]^{-2s+1} \\ & \times f_1\left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \tang\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z}\right] f(z), \end{aligned}$$

on peut écrire

$$(44) \quad \begin{cases} \text{pour } s = \frac{1}{2}, & \Phi(x) = -B^{\left(\frac{1}{2}\right)}(z_1)\log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ & \qquad \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonct. holom. de } 1 - \frac{x}{x_1}\right] \\ & \qquad + \text{fonction holomorphe}, \\ \text{pour } s \geqq \frac{3}{2}, & \Phi(x) = \frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)} B^{s)}(z_1)\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{-2s+1} \\ & \qquad \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe} \right. \\ & \qquad\quad + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{2s-1} \log\left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ & \qquad\quad \left. \times \text{fonct. holom.}\right] + \text{fonct. holomorphe}. \end{cases}$$

25. De tous les points singuliers de $\Phi(x)$ extérieurs au contour S, le point x_1 est le plus rapproché de l'origine (n° **21**). La considération de ce point singulier conduit donc à la valeur asymptotique de I', en appliquant la méthode de M. Darboux. Prenant comme point de dé-

part les formules (44), on a

$$\text{Pour } s=\tfrac{1}{2},\qquad \text{I} = -\,\text{B}^{(\frac{1}{2})}(z_1)$$
$$\times\left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \log\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\right]\left(1+\frac{k'}{m_1}\right);$$

$$\text{Pour } s \geqq \tfrac{3}{2},\qquad \text{I} = \frac{2.4\ldots(2s-3)}{1.3\ldots(2s-2)}\,\text{B}^{(s)}(z_1)$$
$$\times\left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{1-2s}\right]\left(1+\frac{k''}{m_1}\right);$$

k' et k'' restant finis lorsque m_1 augmente indéfiniment.

Finalement, si l'on remplace x_1 par sa valeur $\frac{1}{\varphi(z_1)}$, on arrive à l'expression suivante, valable pour $s \geqq \frac{1}{2}$,

$$\text{I}' = \frac{\text{B}^{(s)}(z_1)}{[1.3\ldots(2s-2)]^2} \times \frac{1}{m_1^{2(1-s)}}\,\varphi^{m_1}(z_1)\left(1+\frac{k}{m_1}\right),$$

k restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

Cette valeur de I' correspond au cas de la *fig.* 16. On en déduit la valeur de I qui correspond à la *fig.* 15 en y changeant z_1 en z_2.

Résumé.

On considère deux planètes P, P_1, *se mouvant dans le même plan.* P *décrit une orbite elliptique* (u, *anomalie excentrique;* r, *rayon vecteur;* $e = \sin\psi$, *excentricité; a demi grand axe;* ζ, *anomalie moyenne*); P_1 *décrit une orbite circulaire qui est enveloppée par l'orbite de* P *sans la toucher* (a_1, *rayon vecteur et demi grand axe;* ζ_1; *anomalie*).

On se propose, m *et* m_1 *désignant deux entiers très grands* ($m_1 > 0$), *de trouver la valeur asymptotique des coefficients de* $\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1)$ *dans le développement de*

$$\frac{f(\text{E}^{iu})f_1(\text{E}^{i\zeta_1})}{\Delta^s}.$$

E *base des log. nép.*; $i = \sqrt{-1}$; $f(E^{iu})$, *fonction entière de* sin u *et* cos u; $f_1(E^{i\zeta_1})$, *fonction entière de* sin ζ_1 *et* cos ζ_1; Δ *carré de la distance* PP_1; $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Le coefficient de $\cos(m\zeta + m_1\zeta_1)$ a pour valeur la partie réelle et le coefficient de $\sin(m\zeta + m_1\zeta_1)$ est égal au multiplicateur de $-\sqrt{-1}$, dans une imaginaire $2I$ qui se calcule comme on va l'indiquer.

Ce dernier coefficient est nul, lorsque les fonctions f, f_1 proviennent d'un premier développement de la fonction perturbatrice ordinaire, effectué suivant les puissances du sinus carré de la demi-inclinaison des orbites de deux planètes dont les mouvements ne s'effectuent pas dans le même plan.

Posons

$$\frac{m}{m_1} = \theta,$$

$$\theta'' = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ - \frac{\psi}{3}\right), \qquad \theta''' = -\frac{1}{8}\,\text{séc}^3\left(60^\circ + \frac{\psi}{3}\right) \quad (^1),$$

$$\alpha = \frac{a_1}{a} < 1,$$

$$r = -a\,\frac{\sin\psi}{2z}\left(z - \text{tang}\,\frac{\psi}{2}\right)\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right),$$

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \text{tang}\,\frac{\psi}{2}\right)^2}\left[z\,E^{-\frac{\sin\psi}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\right]^{-\theta} \quad (^2).$$

Faisons

$$H(z) = \frac{m_1^{s-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\,\frac{r^{1-2s}}{az}\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}\right)^{-s}\sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}}\,\varphi^{m_1}(z)\,f(z)\,f_1\left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \text{tang}\,\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z}\right] \quad (^3).$$

---

(1) J'ai donné une Table fournissant les valeurs de θ'' et θ''' en fonction de l'excentricité $e = \sin\psi$ (*loc. cit.*, p. 466).

(2) Il est indifférent d'adopter l'une ou l'autre des déterminations du facteur élevé à la puissance $-\theta$.

(3) L'expression qui suit f_1 n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à $E^{i\zeta_1}$ dans $f_1(E^{i\zeta_1})$.

et

$$V(z) = \theta \sin\psi\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2\left(z - \cot\frac{\psi}{2}\right) - 2z\left(z + \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right).$$

Ce sont les racines de l'équation $V(z) = 0$ que l'on aura à substituer dans la fonction $H(z)$.

$V(z)$ a ses racines réelles lorsque $\theta < \theta'''$ ou lorsque $0 > \theta > \theta''$. Nous désignerons alors par Z la racine de $V(z)$ donnée par le Tableau de formules

$$\cos\chi = -\theta\left[\frac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad 0 < \chi < 90^\circ,$$

$$v = -2\sqrt{\frac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}}\cos\left(60^\circ - \frac{\chi}{3}\right),$$

$$Z = \frac{v - 1}{v + 1}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

$V(z)$ a des racines imaginaires lorsque $\theta'' > \theta > \theta'''$. Ces racines sont données par la suite des formules

$$\sin 2\chi = -\frac{1}{\theta}\left[\frac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\chi},$$

$$v = -\sqrt{\frac{1 - 2\theta\cos\psi}{3}}\,\frac{1}{\sin 2\xi} \pm \sqrt{-1}\sqrt{1 - 2\theta\cos\psi}\cot 2\xi,$$

$$Z_i = \frac{v - 1}{v + 1}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2}, \qquad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i.$$

Nous supposerons le signe de $\sqrt{-1}$, dans v, choisi de façon que Z_i ait sa partie imaginaire positive.

Appelons z_1 et z_2 $(z_1 > 1 > z_2 > 0)$ les racines de l'équation

$$\sin\psi\, z^2 - 2(1 - \alpha)z + \sin\psi = 0,$$

et posons

$$\Xi(z) = \frac{2}{\pi z}\frac{1}{a^{2s}}\frac{m_1^{2s-2}}{[1.3\ldots 2s-2]^2}\left[-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\left\{\frac{\sin\psi}{\alpha}\frac{z^2 - 1}{z^2} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right\}\right]^{s-1}$$
$$\times\left[\frac{2z^2}{\sin\psi(z^2 - 1)}\right]^{2s-1}\varphi^{m_1}(z)f(z)f_1\left[\frac{\cos^2\frac{\psi}{2}\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)^2}{\alpha z}\right].$$

Voici la valeur de $2\mathrm{I}$ dans tous les cas possibles, ε désignant une quantité telle que le produit $m_1\varepsilon$ reste fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

$$0<\theta'''\begin{cases}1^\circ & Z<z_2, & 2\mathrm{I}=\Xi(z_2)(1+\varepsilon),\\ 2^\circ & z_2<Z<z_1, & 2\mathrm{I}=\mathrm{H}(Z)(1+\varepsilon),\\ 3^\circ & Z>z_1, & 2\mathrm{I}=\Xi(z_1)(1+\varepsilon),\end{cases}$$

$$\theta''>\theta>\theta'''\begin{cases}4^\circ & |\varphi(Z_i)|>|\varphi(z_1)|, & 2\mathrm{I}=[-\mathrm{H}(Z_i)+\mathrm{H}(Z_{-i})](1+\varepsilon),\\ 5^\circ & |\varphi(Z_i)|<|\varphi(z_1)|, & 2\mathrm{I}=\Xi(z_1)(1+\varepsilon),\end{cases}$$

$$0>\theta>\theta''\begin{cases}6^\circ & |\varphi(Z)|>|\varphi(z_1)|, & 2\mathrm{I}=-\mathrm{H}(Z)(1+\varepsilon),\\ 7^\circ & |\varphi(Z)|<|\varphi(z_1)|, & 2\mathrm{I}=\Xi(z_1)(1+\varepsilon),\end{cases}$$

$$\theta>0 \quad 8^\circ \qquad 2\mathrm{I}=\Xi(z_1)(1+\varepsilon).$$

Remarques. — I. Les puissances fractionnaires qui rentrent dans $\Xi(z_2)$, $\Xi(z_1)$, $\mathrm{H}(Z)$ ont un sens arithmétique.

II. Dans $\mathrm{H}(Z_i)$ et $\mathrm{H}(Z_{-i})$: 1° l'argument de $\left(\frac{r^2-a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$ s'obtient en multipliant par $-s$ l'argument de $\frac{r^2-a_1^2}{r^2}$ compris entre $+\pi$ et $-\pi$; 2° la partie imaginaire du radical $\sqrt{\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}$ est négative, si l'argument Ω de Z_i est compris entre o et $\frac{\pi}{4}$; la partie réelle positive, si Ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; la partie imaginaire positive, si Ω est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et π; 3° la partie imaginaire du radical $\sqrt{\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}$ est négative, si Ω est compris entre o et $\frac{\pi}{4}$; la partie réelle négative, si Ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; la partie imaginaire positive, si Ω est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et π.

III. Les valeurs de z que l'on doit substituer à z dans $\mathrm{H}(z)$ sont, comme nous l'avons déjà dit, racines de $\mathrm{V}(z)$ et, par conséquent, de

l'équation $\varphi'(z) = 0$. On peut donc faire sous le radical $\sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}}$,

$$\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)} = \frac{4z^2\left(z - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right)}{V'(z)}.$$

ERRATA

A mon Mémoire inséré au « Journal de Mathématiques pures et appliquées » (1894).

Page 426, lignes 5 et 6, en descendant. *Effacer les mots* « donne son signe à l'expression $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$. Ce facteur ».

Page 413, note. *Au lieu de* (n° 20, *remarque*), *lire* (n° 19, *remarque*) et *au lieu de* $\nu - \mu = -\mu(a_1^2 - r^2)$, *lire* $\nu - \mu = -\frac{\mu}{a_1^2}(a_1^2 - r^2)$.

Page 461, dernière ligne. *Au lieu de* « imaginaire I », *lire* « imaginaire 2 I ».

Par suite de l'oubli de ce facteur 2, il y a lieu de doubler les coefficients des inégalités calculées, pages 468, 469 et 470.

Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure;

Par M. Émile BOREL.

Étant donnée une série de Taylor, il est intéressant de savoir si elle peut être prolongée en quelque manière au delà de son cercle de convergence ou si ce cercle est une coupure; à cette question peut se ramener la suivante, non moins importante : une fonction de variable réelle donnée par son développement en série trigonométrique est-elle ou non analytique ([1])? Il est bien clair que ces questions sont de la nature de celles dont on ne peut espérer une solution complète, c'est-à-dire permettant sûrement de traiter un cas particulier quelconque : tout ce que l'on peut espérer, c'est, d'une part, transformer la condition nécessaire et suffisante qu'il est aisé d'énoncer et lui donner une forme plus immédiatement applicable — il ne faut pas se dissimuler cependant qu'une telle transformation analytique laisse subsister entières les difficultés inhérentes à chaque cas — ; d'autre part, indiquer des règles précises donnant des conditions, soit nécessaires, soit suffisantes, mais ne s'appliquant chacune qu'à des cas particuliers. Je me propose d'indiquer ici une de ces transformations et

([1]) Cf., au sujet de ces remarques, ma Thèse : *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, *passim* et notamment la *Conclusion*. (*Annales de l'École Normale*; 1895.)

une de ces règles. Je ferai usage, pour y parvenir, de la théorie des séries divergentes sommables, que j'ai récemment développée dans ce même Journal; en employant les expressions que j'ai introduites dans cette théorie, on a l'énoncé très simple que voici : *Pour qu'une série de Taylor n'admette pas son cercle de convergence comme coupure, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit sommable en quelque région extérieure à ce cercle* (¹).

De cette proposition générale, j'ai déduit, comme application, le théorème particulier suivant : *La série*

$$\sum a_n x^{c_n},$$

dans laquelle les exposants c_n sont des entiers croissants et les coefficients a_n des nombres quelconques, admet son cercle de convergence comme coupure si le rapport $\frac{c_{n+1}-c_n}{\sqrt{c_n}}$ est, à partir d'un certain rang, supérieur à un nombre fixe s (²).

I.

Il est bien clair que, si une série de Taylor est sommable en une région extérieure à son cercle de convergence, la fonction représentée par sa somme est le prolongement analytique de la fonction qu'elle représente à l'intérieur du cercle; celui-ci ne saurait donc être une

---

(¹) Pour définir la sommation des séries divergentes, je ne fais usage ici que de la fonction entière e^a, sans utiliser la généralisation que j'ai indiquée dans mon Mémoire fondamental.

(²) Cf. Hadamard, *Thèse* (*Journal de Mathématiques*, p. 116; 1892). M. Hadamard y énonce une règle analogue à la nôtre, mais il considère le rapport $\frac{c_{n+1}-c_n}{c_n}$ au lieu de $\frac{c_{n+1}-c_n}{\sqrt{c_n}}$; et il est aisé de voir que sa règle exige, de la part des c_n, une croissance extrêmement plus rapide. Dans une conversation particulière que j'ai eue avec lui en 1894, M. Hadamard m'avait dit qu'il croyait sa règle beaucoup trop restrictive; il était persuadé de la vérité d'une extension analogue à celle que je donne ici; mais ses méthodes ne l'y avaient pas encore conduit.

coupure de la fonction. Nous allons montrer que, réciproquement, si le cercle de convergence n'est pas une coupure, la série est sommable en quelque région extérieure à ce cercle.

Considérons donc une série de Taylor n'admettant pas son cercle de convergence comme coupure; nous pouvons, sans altérer la généralité, supposer le rayon du cercle de convergence égal à *un;* la fonction n'aura pas de points singuliers sur un arc fini AB de ce cercle; on pourra même supposer l'arc AB choisi de manière qu'elle n'ait pas de point singulier dont la distance à l'arc AB soit inférieure à une certaine longueur finie ε. Prolongeons les rayons OA et OB jusqu'en A' et B' ($AA' = BB = \varepsilon$) et traçons l'arc A'B'. Par hypothèse, la fonction n'a pas de point singulier à l'intérieur du contour BSAA'B'B; nous désignerons par Γ ce contour (ou plutôt un contour infiniment voisin situé à son intérieur). Cela posé, x étant un point intérieur à Γ, on a

$$2i\pi f(x) = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$$\frac{2i\pi f^{(n)}(x)}{n!} = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Prenons $x = 0$ et posons

$$A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}};$$

le développement de Taylor de la fonction considérée sera

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Nous allons rechercher si cette série est sommable en un point M intérieur à Γ, mais extérieur au cercle de convergence; nous verrons qu'il suffit que le point M soit intérieur à l'angle ACB, formé par les tangentes en A et B, au cercle de convergence. Nous savons (*Journal de Mathématiques*, p. 108-109) que nous devons former la fonction entière

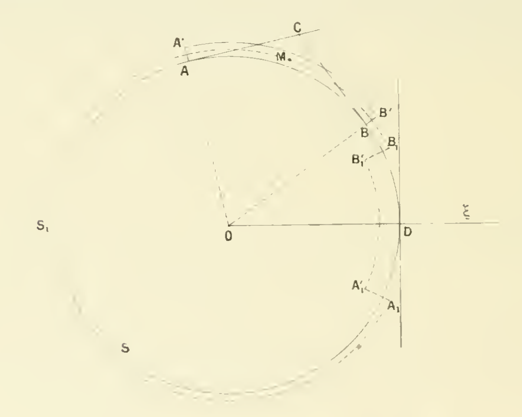
$$u(a) = A_0 + A_1\frac{ax}{1} + A_2\frac{a^2}{2!}x^2 + \ldots + A_n\frac{a^n x^n}{n!} + \ldots$$

et rechercher si l'intégrale $\int_0^\infty u(a)e^{-a}da$ a ou non un sens. En remplaçant les A_n par leurs valeurs, nous avons

$$2i\pi u(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z} e^{\frac{ax}{z}} dz,$$

$$u(a)e^{-a} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z} e^{a\left(\frac{x}{z}-1\right)} dz.$$

Or, lorsque le point z parcourt le contour Γ, il est aisé de voir que le point $\frac{x}{z}$ parcourt le contour $\Gamma_1(B_1S_1A_1A'_1B'_1B_1)$ et des considérations



de Géométrie élémentaire montrent que, si le point M est à l'intérieur du triangle mixtiligne formé par l'arc AB et les tangentes AC et BC, les points A_1 et B_1 sont, de part et d'autre de l'axe $O\xi$ des quantités réelles positives et du même côté que O par rapport à la tangente au cercle de convergence au point D où le coupe $O\xi$. Il en résulte que le contour Γ_1 n'est pas coupé par cette tangente et, par suite, que $\frac{x}{z} - 1$ a constamment sa partie réelle négative et même inférieure à un nombre

négatif fixe $-k$; on en conclut que l'on a

$$|u(a)e^{-a}| < \mathrm{M}e^{-ka},$$

M étant un nombre fixe; la condition de sommabilité est donc remplie.

On peut déduire aisément de ce qui précède que, si l'on joint le point O à chacun des points singuliers A de la fonction, si l'on élève en chaque point A la perpendiculaire à OA et que l'on supprime la portion du plan située au delà de ces perpendiculaires par rapport au point O, on obtient un polygone convexe dans lequel la série de Taylor est sommable [1]. Dans le cas des points singuliers les plus simples, j'avais montré (*loc. cit.*) que c'était précisément là la région de sommabilité; ici nous pouvons seulement affirmer que la région de sommabilité *comprend ce polygone*; nous ne sommes pas certain qu'elle ne soit pas plus grande, bien que cela paraisse peu probable; mais ce point, qu'il serait intéressant d'élucider, n'a pas d'importance pour l'application que nous avons en vue.

Les résultats précédents fournissent une méthode pour la recherche des points singuliers situés sur le cercle de convergence; on a un procédé tout à fait direct pour reconnaître qu'un point est singulier, qu'un arc est dépourvu de point singulier, etc. Supposons toujours le rayon du cercle de convergence égal à l'unité, et soit

$$\sum \mathrm{A}_n z^n$$

la série de Taylor donnée; désignons par ε un nombre positif aussi petit que l'on veut et par θ un angle réel; posons $z = (1+\varepsilon)e^{i\theta}$; nous aurons

$$u(a) = \sum \mathrm{A}_n e^{in\theta} \frac{a^n}{n!}(1+\varepsilon)^n.$$

Si l'on considère a comme une variable complexe, la fonction $u(a)$ croît évidemment plus vite que e^a, grâce au facteur $(1+\varepsilon)^n$; la ques-

(1) J'ai énoncé pour la première fois ce résultat dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences, le 5 octobre 1896.

tion est de savoir si l'on peut choisir l'argument θ de manière que, a restant réel, l'on ait

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0,$$

pour des valeurs de ε aussi petites que l'on veut, mais fixes : le point $z = e^{i\theta}$ n'est alors pas un point singulier. Si, au contraire, quelque petit que soit ε, le produit $e^{-a}u(a)$ ne tend pas vers zéro, le point $z = e^{i\theta}$ est singulier. Considérons la fonction entière

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n z^n}{n!}.$$

D'après les hypothèses faites sur les A_n, cette fonction est telle que si l'on appelle $M(r)$ le maximum du module de $\varphi(z)$, lorsque le module de z est r, la plus grande des limites de $\frac{1}{r}\log M(r)$, lorsque r augmente indéfiniment, est égale à *un*. La question est de savoir si l'on peut, *en faisant augmenter indéfiniment z avec un argument déterminé*, choisir cet argument θ de façon à diminuer cette limite, d'une manière plus précise, de manière que $\frac{1}{r}\log|\varphi(z)|$ soit inférieur à un nombre fixe plus petit que *un*, pour toutes les valeurs de z dont le module dépasse une certaine quantité.

Alors le point $z = e^{i\theta}$ n'est pas un point singulier pour le développement de Taylor

$$\Sigma A_n z^n.$$

Le rapprochement ainsi établi entre cette série et la fonction entière $\varphi(z)$ mériterait sans doute d'être étudié avec soin et conduirait sans doute à cette conclusion que le cercle de convergence est une coupure dans des cas très généraux.

Nous allons nous borner ici à indiquer une application immédiate. Si tous les A_n sont positifs, on voit aisément que la série proposée n'est sommable pour aucune valeur de z positive supérieure à l'unité ; donc le point $z = 1$ est nécessairement un point singulier. Il en est évidemment de même si les A_n ont leurs parties réelles toutes de même signe (à condition que la série obtenue en les remplaçant par leurs parties réelles ait pour rayon de convergence *un*).

Nous nous contenterons pour le moment de ces remarques sur les points singuliers en général et nous bornerons à étudier un cas simple dans lequel on peut affirmer que le cercle de convergence est une coupure.

II.

Considérons d'abord, pour plus de netteté, la série bien connue

$$1 + z + z^4 + z^9 + \ldots + z^{n^2} + \ldots.$$

La fonction entière $u(a)$ est ici [1]

$$u(a) = 1 + \frac{az}{1} + \frac{a^4 z^4}{4!} + \ldots + \frac{a^{n^2} z^{n^2}}{(n^2)!} + \ldots.$$

Nous allons montrer que, quel que soit l'argument de z, si son module dépasse l'unité, on ne saurait avoir $\lim\limits_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0$. Désignons par r le module de z, supposé plus grand que un; nous verrons que l'on peut donner à a une série de valeurs réelles augmentant indéfiniment et pour chacune desquelles $e^{-a} u(a)$ est supérieur à un nombre fixe. Posons, en effet,

$$ar = n^2.$$

Le terme de $u(a)$, qui a le plus grand module, est évidemment alors

$$\frac{a^{n^2} z^{n^2}}{(n^2)!}$$

et son module est

$$\frac{(n^2)^{n^2}}{(n^2)!}.$$

Nous allons, en retranchant de ce module les modules de tous les

(1) On remarquera que nous tenons compte des termes qui sont nuls dans la série proposée; c'est évidemment ainsi que l'on doit procéder pour appliquer notre proposition sur la région de sommabilité. Il serait intéressant de rechercher, d'une manière générale, de quelle manière l'introduction de termes nuls dans une série en modifierait la sommabilité et, exceptionnellement, la somme.

autres termes, obtenir une limite inférieure du module de $u(a)$. Nous considérerons successivement les termes qui le précèdent et ceux qui le suivent et nous utiliserons la formule d'approximation

$$p! = \frac{p^p e^{-p}}{\sqrt{2\pi p}},$$

ce qui est légitime lorsque p est assez grand, ce que nous pouvons supposer.

Prenons d'abord le terme de plus grand module et négligeons partout le facteur $\sqrt{2\pi}$; nous obtiendrons pour sa valeur approchée $\frac{1}{n}e^{n^2}$. Supposons maintenant $p < n$ et considérons le terme

$$\frac{(n^2)^{p^2}}{(p^2)!}.$$

En négligeant toujours le facteur $\sqrt{2\pi}$, nous aurons la valeur approchée

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{p}\left(\frac{n}{p}\right)^{2p^2} e^{p^2}.$$

On voit aisément que les termes pour lesquels p est petit par rapport à n sont négligeables. Par exemple, les $\frac{n}{2}$ termes pour lesquels $p < \frac{n}{2}$ sont inférieurs à celui qu'on obtient en faisant $p = \frac{n}{2}$ et, par suite, leur somme inférieure à

$$e^{n^2\left(\frac{1+\log 2}{2}\right)},$$

expression bien plus petite que $\frac{1}{n}e^{n^2}$ dès que n est un peu grand. Si nous supposons p compris entre $\frac{n}{2}$ et n, nous aurons

$$\log\frac{n}{p} = \log\left(1 + \frac{n-p}{p}\right) = \frac{n-p}{p} - \frac{(n-p)^2}{2p^2} + \frac{(n-p)^3}{3p^3} - \ldots,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{n}{p}\right)^{2p^2} = e^{2p(n-p) - (n-p)^2 + \frac{2(n-p)^3}{3p} - \dots}.$$

La valeur approchée (α) devient, par suite,

$$\frac{1}{p} e^{n^2} e^{-2(n-p)^2 + \frac{2(n-p)^3}{3p} - \frac{2(n-p)^4}{4p^2} + \dots},$$

et, en supposant $n - p < p$, c'est-à-dire $p > \frac{n}{2}$, elle est inférieure à

$$\frac{1}{p} e^{n^2 - (n-p)^2}.$$

Un calcul analogue donnerait le même résultat en supposant $p > n$; nous en concluons que le module de $u(a)$ pour $ar = n^2$ est supérieur au produit de e^{n^2} par l'expression suivante

$$\frac{1}{n}\left(\frac{e^{-1}}{n-1} + \frac{e^{-4}}{n-2} + \frac{e^{-9}}{n-3} + \dots + \frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{\frac{n}{2}} + e^{n^2\frac{\log 2 - 1}{2}}\right)$$
$$- \left(\frac{e^{-1}}{n+1} + \frac{e^{-4}}{n+2} + \frac{e^{-9}}{n+3} + \dots\right),$$

et il est manifeste que, pour n assez grand, cette expression est supérieure à $\frac{1}{10n}$. Nous avons $ar = n^2$, ou $a = \frac{n^2}{r}$ et r est supérieur à un; donc

$$e^{-a} u(a) > \frac{1}{10n} e^{n^2\left(1 - \frac{1}{r}\right)},$$

et cette expression peut évidemment devenir aussi grande que l'on veut, quelque voisin que soit r de l'unité.

Nous en concluons que la série considérée n'est sommable en aucun point extérieur à son cercle de convergence et admet par suite ce cercle pour coupure. Ce résultat particulier aurait pu être établi de bien d'autres manières; mais la démonstration que nous avons donnée

peut visiblement être étendue à des fonctions bien plus générales. Considérons d'abord la fonction

$$\varphi(z) = 1 + z^{c_1} + z^{c_2} + \ldots + z^{c_n} + \ldots,$$

et supposons $c_{n+1} - c_n > 3\sqrt{c_n}$; la même démonstration réussira *a fortiori* puisque les termes qui précéderont ou suivront le terme d'exposant c_n dans $u(a)$ seront, pour $ar = c_n$, plus petits que les termes analogues dans la série considérée en premier lieu, pour laquelle on a

$$c_{n+1} - c_n = 2\sqrt{c_n} + 1;$$

la fonction $\varphi(z)$ admettra, par suite, son cercle de convergence comme coupure.

Supposons maintenant que l'on ait

$$c_{n+1} - c_n > \frac{1}{k}\sqrt{c_n},$$

k étant un nombre entier quelconque, et posons

$$z = y^{9k^2}.$$

Nous aurons

$$\varphi(z) = \psi(y) = \sum y^{9k^2 c_n} = \sum y^{c'_n},$$

en posant $c'_n = 9k^2 c_n$.

On aura d'ailleurs

$$c'_{n+1} - c'_n = 9k^2(c_{n+1} - c_n) > 9k\sqrt{c_n} > 3\sqrt{c'_n}.$$

La fonction $\psi(y)$ admet, par suite, son cercle de convergence comme coupure; il en est évidemment de même de la fonction $\varphi(z)$, sous la seule condition

$$c_{n+1} - c_n > \varepsilon\sqrt{c_n},$$

ε étant un nombre positif quelconque.

Considérons maintenant la série

$$f(z) = \sum a_n z^{c_n},$$

les a_n étant des nombres quelconques tels que le rayon de convergence soit égal à l'unité; nous supposons de plus $c_{n+1} - c_n > 3\sqrt{c_n}$ (il suffirait évidemment que l'on ait $c_{n+1} - c_n > \varepsilon\sqrt{c_n}$). Le rayon de convergence étant égal à l'unité, on sait ([1]) que, ou bien la suite

$$\left|\sqrt[c_1]{a_1}\right|, \;\ldots,\; \left|\sqrt[c_n]{a_n}\right|, \;\ldots,$$

a pour limite *un*, ou bien elle tend vers plusieurs limites différentes, et *un* est la plus grande de ces limites. Dans tous les cas, on peut trouver dans cette suite une suite partielle ayant pour limite *un* ([2]); il suffira de recommencer les raisonnements précédents, mais en prenant seulement pour termes de plus grand module des termes dont les coefficients fassent partie de cette suite partielle; il n'y aura ainsi aucune difficulté à montrer que la série n'est sommable en aucun point extérieur à son cercle de convergence et admet, par suite, ce cercle comme coupure ([3]).

([1]) Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*; 1821. Ce que Cauchy appelle la *plus grande des limites* a été appelé par M. Paul du Bois-Reymond *obere Unbestimmheitsgrenze* et par M. Hadamard *limite supérieure pour n infini*. L'expression de Cauchy nous paraît être la plus simple et la plus claire.

([2]) Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions*, etc. (*Journal de Mathématiques*; 1892, p. 106).

([3]) En terminant, nous tenons à faire une remarque essentielle. Dans les diverses applications que nous avons indiquées jusqu'ici de notre théorie générale des séries divergentes, nous avons fait uniquement usage de la fonction e^a, ou de fonctions s'y rattachant immédiatement. Il ne faudrait pas en conclure que la généralisation dans laquelle on considère une fonction entière quelconque n'offre qu'un simple intérêt de curiosité; nous pensons, au contraire, qu'en choisissant convenablement cette fonction entière, on pourrait en tirer des applications intéressantes; la seule difficulté consiste en ce qu'il n'y a pas de fonction entière ayant des propriétés aussi simples et aussi bien connues que celles de la fonction exponentielle; c'est pourquoi les applications où celle-ci intervient s'offrent naturellement les premières.

HENRY RESAL;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

M. Amé-Henry Resal, Membre de l'Académie des Sciences, est mort le 22 août 1896.

Nous laissons à d'autres, plus autorisés, le soin de résumer la carrière de cet illustre savant, d'analyser ses importants travaux en Mécanique, en Physique mathématique, en Mécanique céleste; nous nous bornerons à rappeler le dévouement avec lequel il a dirigé ce Journal pendant dix années consécutives, de 1875 à 1885.

Lorsque, après trente-neuf années passées sur la brèche, M. Liouville prit la résolution de se retirer, la situation était bien différente de ce qu'elle est aujourd'hui. Les Recueils de ce genre étaient rares, et nos savants, déjà embarrassés pour la publication de leurs Mémoires, auraient vivement senti la disparition de celui-ci.

En se consacrant à la continuation de cette œuvre menacée de périr, M. Resal a donc rendu à la Science française un service important, dont on ne saurait lui être trop reconnaissant.

C. JORDAN.

Notice sur Amé-Henry Resal;

Par M. Maurice LÉVY.

Tous ceux qui s'intéressent à la Mécanique en ce qu'elle a d'utile, comme en ce qu'elle a d'élevé, prendront part au deuil dont se trouve frappée l'Académie par la mort d'Henry Resal. Avec lui, en effet, s'en va le véritable continuateur de Poncelet, celui de ses disciples qui a le mieux su mettre en valeur les méthodes et les procédés du maître.

Mais Resal était lui-même un maître et le rôle de disciple, bien qu'il ne répugnât en rien à sa modestie, n'eût suffi ni à son extraordinaire activité, ni à ses multiples et brillantes facultés. La Mécanique appliquée telle que l'entendait Poncelet était son domaine de prédilection; mais la Mécanique céleste, la Physique mathématique, la Cinématique pure, la Géométrie lui étaient également familières, et, dans toutes ces branches de la Science, il laisse les marques d'un esprit particulièrement inventif et primesautier.

L'homme n'était pas inférieur au savant. C'était un cœur d'or et un caractère d'une inflexible droiture.

Il n'avait rien d'un apôtre. La vertu lui était trop naturelle pour qu'en la pratiquant il se crût autorisé à la prêcher. Plus volontiers il en eût ri, comme il était disposé à rire de tout. Mais, tout en se riant, il n'a jamais manqué au plus petit de ses devoirs. Il savait les remplir tous gaiement, simplement et surtout sans phrases.

Nous savons tous combien grande était son assiduité à nos séances,

et nous, ses Confrères de la Section de Mécanique, savons avec quel soin méthodique et scrupuleux il s'acquittait de ses devoirs de doyen, sachant très habilement, quand il le fallait, user de sa belle humeur bourguignonne pour faire accepter une grande fermeté. Mais où il a porté le plus haut le sentiment inné du devoir qui le guidait en toutes choses, c'est dans son enseignement. J'en parle savamment, ayant eu, dans ma jeunesse, l'honneur d'être, pendant plusieurs années, son répétiteur à l'École Polytechnique. Je tiens son cours pour l'un des plus fructueux qui aient jamais été professés. C'est peut-être de tous, sans même excepter celui si marquant de son éminent devancier Bour, celui qui remplit le mieux la double visée qu'on poursuit à l'École Polytechnique : visée scientifique dans le présent, visée pratique pour l'avenir. Ses exemples sont toujours choisis aux confins de la science la plus solide et de la pratique la plus moderne ; il les renouvelait sans cesse. Ses successeurs y puiseront longtemps et à pleines mains.

Les théories générales y sont condensées de main de maître, quelques-unes avec autant d'originalité que de simplicité. Je citerai notamment la Dynamique des corps solides, l'Hydraulique, la Thermodynamique et la Théorie de la transmission du travail dans les machines.

C'est un honneur pour une École d'avoir inspiré un tel enseignement, et celui qui l'a conçu méritait grandement la reconnaissance de cette École.

Ce n'est pas la forme didactique qu'il faut chercher chez Resal ; elle lui était fort indifférente. Nourri de la moelle de la Science, il aimait, par-dessus tout, à la servir en substance concentrée. Cette façon d'enseigner exige, de la part des auditeurs, un travail personnel, ce qui est un bien. Tous ceux qui ont voulu se livrer à ce travail se sont trouvés, par le cours de Resal, préparés à toutes les applications, si variées puissent-elles être ou devenir, de la Mécanique à l'Art de l'ingénieur.

Du reste, ingénieur dans l'âme, il aimait à travailler pour ses collègues. « Fils d'architecte, disait-il volontiers, j'ai tenu la truelle, avant de savoir tenir une plume. » Et, de fait, c'est en s'amusant à voir manier la truelle sous la direction de son père, architecte à Plom-

bières, que, sans effort et avec un minimum de préparation au collège d'Épinal, puis à Sainte-Barbe, il est arrivé, dans les premiers, à l'École Polytechnique, à l'âge de dix-huit ans. Pour la partie mathématique, il eût été largement prêt dès l'âge de seize ans.

C'était en 1847. Les grandes découvertes d'Ampère, en Électrodynamique, venaient de faire leur entrée dans l'enseignement classique. Resal se prit d'enthousiasme pour elles et en fit l'objet de son premier Mémoire rédigé pendant son séjour même à l'École Polytechnique. Bravais a fait à son jeune élève le grand honneur d'en introduire une partie dans ses leçons.

Également, pendant qu'il était encore élève, il fit, sur la Théorie du frottement dans les engrenages coniques et la vis sans fin, une étude qui fut publiée au *Journal de l'École Polytechnique* en 1850.

Son ardeur pour la Science, comme celle de ses camarades, fut un instant suspendue par la Révolution de 1848. Aux journées de juin, il servit en qualité d'aide de camp du général Mellinet.

Sorti second de l'École, il choisit la carrière des Mines. Les Sciences appliquées enseignées à l'École des Mines le trouvèrent aussi assidu que les Sciences mathématiques, sans d'ailleurs le détourner de ces dernières. En 1853, il fut nommé Ingénieur des Mines à Besançon, où il s'occupa de la Carte géologique des régions montagneuses de la contrée. L'année suivante, il prit le grade de Docteur ès Sciences mathématiques.

Sa thèse est la première application faite au globe terrestre du problème de l'équilibre élastique d'une enveloppe sphérique, si magistralement résolu par Lamé. Soutenue devant Cauchy et Lamé lui-même, elle lui valut la protection de ces deux illustres savants, de même que la précocité de ses travaux d'élève lui avait valu, de la part de Poncelet, une amitié qui n'a cessé qu'avec la vie.

En 1855, Resal fut nommé Professeur à la Faculté de Besançon. De cet enseignement est sortie non seulement sa *Cinématique pure* où, entre autres innovations, on trouve la notion et la théorie de la suraccélération, mais aussi divers travaux théoriques et expérimentaux sur l'horlogerie, travaux qui, avec ceux de Phillips, ont contribué aux progrès de l'horlogerie de précision.

C'est à la même époque, en 1865, qu'il publia son *Traité de Mé-*

canique céleste, destiné surtout à rendre plus accessible l'œuvre de Laplace.

La mort de Bour, survenue d'une façon si inopinée en 1872, rendait vacante la chaire de Mécanique rationnelle de l'École Polytechnique. Resal se trouvait naturellement désigné pour la remplir. J'ai dit plus haut que la succession, pour lourde qu'elle fût, n'a pas été, il s'en faut, au-dessus de ses forces.

Cette même année, il commençait la publication de son *Traité de Mécanique générale*, en sept Volumes, véritable monument élevé à la Mécanique rationnelle et à ses applications dans toutes les directions.

C'est là qu'on trouve résumés les Mémoires les plus importants de Resal. Peu d'Ouvrages sont plus nourris. L'auteur n'y prend pas toujours la peine de coordonner ses idées; il les sème un peu; mais il y en a beaucoup.

Quelque problème que l'on ait à résoudre, on peut le consulter avec fruit. Tout y est condensé. Parfois, on trouve, en quelques pages, des traits de lumière. Je citerai une Note, sur le mouvement des projectiles à l'intérieur d'une arme à feu, où sont, pour la première fois, appliqués avec succès les principes de la Thermodynamique à ce phénomène complexe de la pression développée, par la combustion, dans l'âme d'une arme. On peut dire que là se trouve l'origine de la balistique intérieure contemporaine. Notre Confrère Sarrau m'a dit souvent qu'il y a puisé ses premières inspirations sur ce sujet. Au surplus, à la suite de ce travail et de plusieurs autres théoriques ou expérimentaux sur le mouvement des projectiles, le Ministère de la Guerre a créé, pour Resal, un poste spécial : celui d'adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques.

Son exposition concise, mais remarquablement nette, de la théorie des volants et des régulateurs est certainement aussi le point de départ des travaux les plus remarquables faits, depuis, sur ce sujet délicat.

Une autre Note, insérée aux *Comptes rendus*, traite d'une façon non moins heureuse un autre sujet nouveau : celui de la propagation d'une onde liquide dans un tube élastique, question qui trouve son application dans les phénomènes de la circulation du sang et dans les expériences de notre Confrère Marey.

Outre ces travaux d'inspiration primesautière et de plein succès, ce vaste Ouvrage contient une foule d'applications utiles ou d'exercices intéressants.

En 1873, l'Académie des Sciences ouvrit ses portes à Resal, en lui donnant la succession du baron Dupin. Cette haute distinction n'a fait que surexciter son ardeur au travail. Ses Communications à l'Académie ou aux *Annales des Mines* montrent que son activité ne s'est jamais ralentie. Resal avait deux qualités rarement unies : il travaillait avec une merveilleuse facilité et il travaillait toujours. Le travail était sa seule distraction quand il était bien portant, son seul remède, remède dangereux, quand sa robuste santé a commencé à le trahir.

En 1888, il a publié un *Traité de Physique mathématique*, qui a pour objet de résumer cette vaste Science, comme il avait précédemment résumé la Mécanique céleste.

Il travaillait à la seconde édition de la *Mécanique générale*, dont les deux premiers Volumes ont paru, quand la mort est venue le surprendre.

Depuis plusieurs années, sa santé déclinait visiblement. La maladie qui a fini par l'emporter avait légèrement courbé ce corps autrefois droit et élancé comme les grands chênes des forêts des Vosges au milieu desquelles s'est passée son enfance; elle avait pâli et quelque peu attristé ce fin visage qu'on était habitué à voir toujours animé et souriant. Mais rien ne faisait présager une fin prochaine, lorsque, comme tous les ans, il est parti pour aller passer ses vacances en Suisse et en Savoie. Le 29 juin, il m'adressait encore de Saint-Gervais une lettre dans laquelle il me communiquait diverses observations sur un Mémoire que l'Académie pourrait être appelée à juger. Cette lettre me montrait qu'il avait toujours l'esprit en éveil et le souci des jugements à rendre par l'Académie.

Vers le milieu du mois d'août, il fut pris d'une violente crise d'atonie intestinale; sa famille accourut près de lui. Les soins qui lui furent prodigués l'avaient remis assez bien pour qu'il manifestât le désir d'aller visiter l'Exposition de Genève. Mais en route, à Annemasse, il fut repris avec une violence telle qu'une opération chirurgicale fut jugée nécessaire. Il succomba peu de jours après, le 22 août. Il a été

inhumé, le 25 août, à Étang-sur-Arroux (Saône-et-Loire), lieu de sépulture de famille.

C'est dans ce coin de la Bourgogne qu'il comptait se retirer dans deux ans, lorsqu'il aurait eu droit à sa retraite comme Inspecteur général des Mines. Au lieu du repos bien mérité et qui n'eût pas été l'oisiveté, qu'il y espérait, c'est le repos suprême qu'il y dort à présent. Mais il laisse après lui une œuvre que je n'ai pu qu'esquisser ici à grands traits et qui assure la survivance de son nom.

Il laisse à ses deux fils le plus précieux de tous les héritages : l'exemple d'une vie consacrée tout entière aux progrès de la Science et à ses applications en ce qu'elles ont de plus noble et de plus désintéressé. Cet exemple n'a pas été perdu pour eux, et Resal a eu la joie bien rare de les voir tous deux sortir brillamment de l'École Polytechnique, dans la carrière des Ponts et Chaussées, qu'ils parcourent de façon à ajouter encore à la réputation du nom qu'ils portent.

Ces deux fils sont la couronne et la parure d'une mère qui, grâce à des dons exceptionnels, a pu les suivre, non seulement dans leur éducation classique, mais même fort loin dans leur instruction scientifique. Ils seront aussi sa consolation dans la cruelle épreuve qu'elle subit et dans laquelle l'accompagnent les respectueuses sympathies de l'Académie, du monde savant et des Ingénieurs.

FIN DU TOME II DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

22694 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME II.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

Journal de mathématiques
pures et appliquées

